L-Forminvarianz (L-Kovarianz) der Mx-L-Theorie

I: FG (abgeschlossenes System)

$\rho(\vec{r},t)$

$$\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi \sum_{b=1}^{N} q_b\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_b(t))$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

$\rho, \vec{j} \longrightarrow \rho', \vec{j}'$

"Fußgängermethode" kompliziert

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c} \sum_{b=1}^{N} q_b\, \vec{v}_b(t)\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_b(t)) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$\vec{j}(\vec{r},t)$

KG + BG

$$\frac{d}{dt}\frac{m_a \vec{v}_a(t)}{\sqrt{1-\frac{v_a^2(t)}{c^2}}} = q_a\left[\vec{E}(\vec{r}_a(t),t) + \frac{\vec{v}_a(t)}{c} \times \vec{B}(\vec{r}_a(t),t)\right]$$

$a = 1, 2, \ldots, N$

$\exists$ Transformationsgesetz

$$I: \vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t) \longrightarrow I': \vec{E}'(\vec{r}',t'), \vec{B}'(\vec{r}',t')$$

sodaß diese Gleichungen forminvariant?

"JET-Methode"

Vierertensoren
(Minkowskitensoren)

"Fußgänger-Methode"

LT einsetzen, Kettenregel,
Terme umgruppieren ...

s. H. Melcher (Standard-LT)

Was tun wir?

Wien – Frankfurt im JET

Frankfurt – Paris zu Fuß ...

"JET-Methode": Viererskalare, Vierervektoren

"Erinnerung":

steht für x, y, z

$$I: \quad (x^\mu) \equiv (\underset{\underset{ct}{\parallel}}{x^0}, \underset{\underset{x}{\parallel}}{x^1}, \underset{\underset{y}{\parallel}}{x^2}, \underset{\underset{z}{\parallel}}{x^3}) = (ct, \vec{r})$$

steht für dx, dy, dz

$$(dx^\mu) \equiv (\overset{\overset{d(ct)}{\parallel}}{dx^0}, \overset{\overset{dx}{\parallel}}{dx^1}, \overset{\overset{dy}{\parallel}}{dx^2}, \overset{\overset{dz}{\parallel}}{dx^3}) = (d(ct), d\vec{r}) = (c\,dt, d\vec{r})$$

$I \to I'$: LT

$$x^{\mu'} = L^{\mu'}_{\ \alpha}\, x^\alpha - \ell^{\mu'}$$ (Summationsübereinkommen!)

$$\boxed{dx^{\mu'} = L^{\mu'}_{\ \alpha}\, dx^\alpha}$$

Prototyp eines Vierervektors ("Verschiebungsvektor" im Minkowskiraum)

Teilchenbahn $\vec{r}_a(t)$; $\quad \vec{v}_a(t) = \dfrac{d\vec{r}_a(t)}{dt}$

$$(dx_a^\mu) = (c\,dt, d\vec{r}_a)$$

$(ds)^2 = c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2$
$= L$-invariant

$$d\tau_a = \sqrt{1 - \frac{v_a^2(t)}{c^2}}\, dt = \frac{dt}{\gamma(v_a(t))} = L\text{-Invariante},$$

Eigenzeitdifferential von Teilchen a

$$v_a^\mu = \frac{dx_a^\mu(\tau_a)}{d\tau_a}$$

"Vierergeschwindigkeit" von Teilchen a

$$(v_a^\mu) = \left(\gamma(v_a)c, \gamma(v_a)\vec{v}_a\right) = \gamma(v_a)(c, \vec{v}_a)$$

$$(v_a^\mu) = (v_a^0, \vec{v}_a) \quad \text{mit} \quad v_a^0 = \gamma(v_a)c$$

$$\vec{v}_a = \gamma(v_a)\vec{v}_a$$

$$d^4x := dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3 = d(ct)\underbrace{dx\,dy\,dz}_{d^3r}$$

$$= c\,dt\,d^3r$$

$$d^4x' = \underbrace{\frac{\partial(x^{0'},x^{1'},x^{2'},x^{3'})}{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}}\, d^4x$$

Funktional-
(Jacobi-)
Determinante

$$\det\Big(\underbrace{\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha}}_{L^{\mu'}_{\ \alpha}}\Big) = \det \underline{L} = 1$$

Aufg. 1 ("eigentliche" LT)

$$d^4x = d^4x' = L\text{-Invariante}$$

$$dQ_a = dQ_a'$$

L-Invarianz
(und strenge
Additivität
der Ladung)

d.h.

$$dQ_a = \rho_a(\vec r,t)\,d^3r = \rho_a'(\vec r\,',t')\,d^3r' = dQ_a'$$

$$= \text{Viererskalarfeld}$$

$$c\,\rho_a(\vec r,t)\,d^3r\,dx_a^\mu = \text{Vierervektorfeld}$$

L-Invariante

Vierervektor

$$= \rho_a(\vec r,t)\,\underbrace{d^3r\,c\,dt}_{d^4x = L\text{-Invariante}}\,\frac{dx_a^\mu}{dt} \Longrightarrow$$

$$\rho_a(\vec r, t)\,\frac{dx_a^\mu}{dt} = \text{Vierervektorfeld}$$

$$= \rho_a(\vec r, t)\,\underbrace{\frac{d\tau_a}{dt}}_{\frac{1}{\gamma(v_a)}}\,\underbrace{\frac{dx_a^\mu}{d\tau_a}}_{v_a^\mu}\quad , \quad (v_a^\mu) = \gamma(v_a)(c, \vec v_a)$$

I: $\left(\rho_a \frac{dx_a^\mu}{dt}\right) = (c\rho_a, \vec v_a \rho_a) = (c\rho_a, \vec j_a)$

$=: (j_a^\mu)$ "Viererstromdichte" der Ladung a

$\sum_{a=1}^{N} \ldots$ gibt Gesamtdichten

$$(j^\mu) = (c\rho, \vec j)$$ Gesamt-"Viererstromdichte"

I → I':

$$j^{\mu'}\underbrace{(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}_{\vec r', t'} = L^{\mu'}_{\ \alpha}\, j^\alpha \underbrace{(x^0, x^1, x^2, x^3)}_{\vec r, t}$$

s. Seite 3-2

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec j = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(c\rho) + \vec\nabla \cdot \vec j = 0$$

Ladungserhaltung: "Naturgesetz", daher:

"Müßte sich als L-forminvariant (L-kovariant) erweisen."

Beispiel: Standard-LT

$$x^{\mu'} = L^{\mu'}_{\ \alpha} x^{\alpha}$$

$$(x^{\mu}) = (ct, \vec{r})$$

$$ct' = \gamma(V)\left(ct - \frac{V}{c}x\right)$$

$$x' = \gamma(V)\left(x - \frac{V}{c}ct\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$j^{\mu'}(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = L^{\mu'}_{\ \alpha} j^{\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$(j^{\mu}) = (c\rho, \vec{j})$$

$$c\rho'(\vec{r}', t') = \gamma(V)\left(c\rho(\vec{r}, t) - \frac{V}{c} j_x(\vec{r}, t)\right)$$

$$j_x'(\vec{r}', t') = \gamma(V)\left(j_x(\vec{r}, t) - \frac{V}{c} c\rho(\vec{r}, t)\right)$$

$$j_y'(\vec{r}', t') = j_y(\vec{r}, t)$$

$$j_z'(\vec{r}', t') = j_z(\vec{r}, t)$$

Umkehrtransformation?
"REZIPROZITÄT"

Kurzschreibweise:

$$c\rho' = \gamma(V)\left(c\rho - \frac{V}{c} j_x\right)$$

$$j_x' = \gamma(V)\left(j_x - \frac{V}{c} c\rho\right)$$

$$j_y' = j_y$$

$$j_z' = j_z$$

Aufgabe 2

Inneres Produkt von Vierervektoren:

$\underline{a}$: I: $(a^\mu) = (a^0, \vec{a})$
I': $(a^{\mu'}) = (a^{0'}, \vec{a}\,')$ $\quad a^{\mu'} = L^{\mu'}{}_\alpha a^\alpha$

$\underline{b}$: analog

$\underline{a} \cdot \underline{b} = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = a^{0'} b^{0'} - \vec{a}\,' \cdot \vec{b}\,' =$ L-Invariante

Prototyp: $(ds)^2 := \underline{dx} \cdot \underline{dx} = (dx^0)^2 - (d\vec{r})^2$
$= c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2 =$ L-invariantes Wegelement

Vierdimensionaler Gradienten-(Nabla-)Operator:

$\underline{\partial}$: I: $(\partial^\mu) = (\partial^0, \vec{\partial}) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$!

Vierervektoroperator

I': $(\partial^{\mu'}) = (\partial^{0'}, \vec{\partial}\,') = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}, -\vec{\nabla}\,'\right)$

$\partial^{\mu'} = L^{\mu'}{}_\alpha \partial^\alpha$

Beachte: $\partial^\mu \neq \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ $\quad$ ($\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ wäre ∂_μ !)

Kontinuitätsgleichung

"Dreierdivergenz"

$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(c\rho) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$

$= \partial^0 j^0 - \vec{\partial} \cdot \vec{j} = \underline{\partial} \cdot \underline{j}$ ---- "Viererdivergenz"

$\boxed{\underline{\partial} \cdot \underline{j} = 0}$ $\quad$ I: $\partial^0 j^0 - \vec{\partial} \cdot \vec{j} = 0$
I': $\partial^{0'} j^{0'} - \vec{\partial}\,' \cdot \vec{j}\,' = 0$ usf.

offensichtlich L-kovariant (L-forminvariant)

d'Alembert-Operator (vierdim. Laplaceoperator, Quablaoperator, Wellenoperator):

"dreidim. Laplace"

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \underbrace{- \vec{\nabla}^2}_{-(-\vec{\nabla})\cdot(-\vec{\nabla})} = (\partial^0)^2 - \vec{\partial}^2 = \underline{\partial}\cdot\underline{\partial}.$$

"vierdim. Laplace"

$\Box = \underline{\partial}\cdot\underline{\partial}$ L-invarianter Operator

Feldgleichungen für die elm. Potentiale

1) $\underline{\Box}\varphi = 4\pi\rho = \frac{4\pi}{c}c\rho = \underline{\frac{4\pi}{c}}j^0$ — L-invariant

2) $\underline{\Box}\vec{A} = \underline{\frac{4\pi}{c}}\vec{j}$

$(j^\mu) = (j^0, \vec{j}) = (c\rho, \vec{j})$

3) $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \underbrace{\operatorname{div}\vec{A}}_{-(-\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -\vec{\partial}\cdot\vec{A}} = \partial^0\varphi - \vec{\partial}\cdot\vec{A} = 0$

1) + 2) dann und nur dann L-kovariant, falls

$$\boxed{(A^\mu) = (A^0, \vec{A}) = (\varphi, \vec{A})}$$

Viererverktorfeld

elm. Viererpotential

$\Longrightarrow$ 3) wird dann zu

$$\partial^0 A^0 - \vec{\partial}\cdot\vec{A} = \underline{\partial}\cdot\underline{A} = 0$$

$(\underline{\partial}\cdot\underline{\partial})$

1), 2) $\left.\right\}$ $\Box\underline{A} = \frac{4\pi}{c}\underline{j}$

3) $\underline{\partial}\cdot\underline{A} = 0$

offensichtlich L-kovariante Form der FG für die elm. Potentiale

Damit sind wir mit dem JET in Frankfurt gelandet...

Nun der Fußmarsch nach Paris ...

Transformation der Potentiale und Feldstärken bei Bezugssystemwechsel:

$$A^{\mu'}(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = L^{\mu'}_{\ \alpha} A^{\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

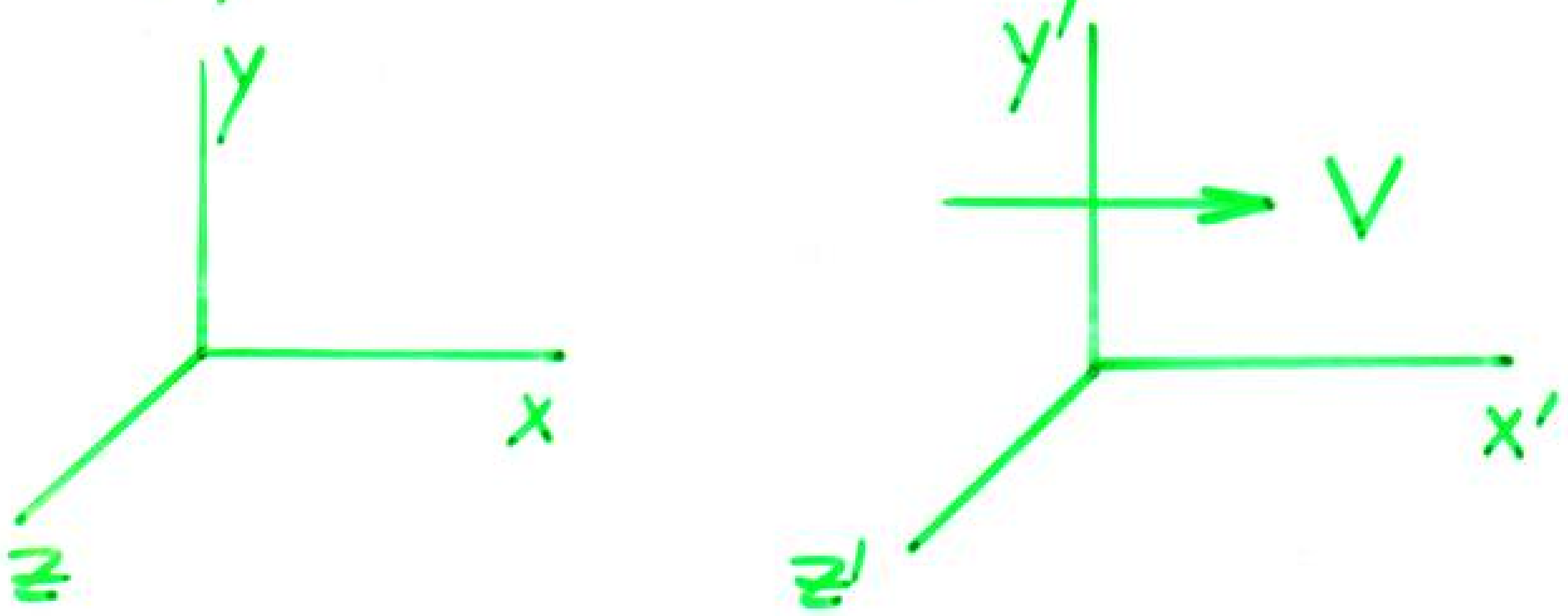
$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r},t)$$

$$\vec{E}'(\vec{r}',t') = -\operatorname{grad}'\varphi'(\vec{r}',t') - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'(\vec{r}',t')}{\partial t'}$$

$$\vec{B}'(\vec{r}',t') = \operatorname{rot}'\vec{A}'(\vec{r}',t')$$

Speziell für Standard-LT:



$$x^{\mu'} = L^{\mu'}_{\ \alpha} x^{\alpha} - \underbrace{\ell^{\mu'}}_{0}, \quad (L^{\mu'}_{\ \alpha}) = \begin{pmatrix} \gamma(V) & -\frac{V}{c}\gamma(V) & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c}\gamma(V) & \gamma(V) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$ct' = \gamma(V)\left(ct - \frac{V}{c}x\right)$$

$$x' = \gamma(V)\left(x - \frac{V}{c}ct\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Wie ginge es mit Tensorrechnung (Minkowskitensoren) weiter?

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$ elm. Feldtensor *)

$$F^{\nu\mu} = - F^{\mu\nu}$$, d.h. 6 "wesentliche" Komponenten

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$ Gaußsches Maßsystem!

$$\vec{E}(\vec{r},t),\, \vec{B}(\vec{r},t) \xrightarrow{LT} \vec{E}'(\vec{r}',t'),\, \vec{B}'(\vec{r}',t')$$

aus

$$F^{\mu'\nu'} = L^{\mu'}_{\alpha} L^{\nu'}_{\beta} F^{\alpha\beta}$$

Nächster Schritt:

Mx-Gln. als Vierertensorgleichungen (in denen neben Feldtensor nur Vierergradientenoperator, Viererstromdichte und c vorkommen können) anschreiben (s. Skriptum)

Das wäre die Weiterreise mit JET nach Paris...

---

*) Vierertensorform von

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$!

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

$\Longrightarrow$

$$\varphi'(\vec r',t') = \gamma(V)\left(\varphi(\vec r,t) - \frac{V}{c}A_x(\vec r,t)\right)$$

$$A_x'(\vec r',t') = \gamma(V)\left(A_x(\vec r,t) - \frac{V}{c}\varphi(\vec r,t)\right)$$

$$A_y'(\vec r',t') = A_y(\vec r,t)$$

$$A_z'(\vec r',t') = A_z(\vec r,t)$$

Aufgabe 3
Umkehrtransformationen?

$\Longrightarrow$ Standard-LT der elm. Feldstärken $\vec E, \vec B$

$E_x' = E_x$	$B_x' = B_x$
$E_y' = \gamma(V)\left(E_y - \frac{V}{c}B_z\right)$	$B_y' = \gamma(V)\left(B_y + \frac{V}{c}E_z\right)$
$E_z' = \gamma(V)\left(E_z + \frac{V}{c}B_y\right)$	$B_z' = \gamma(V)\left(B_z - \frac{V}{c}E_y\right)$

Argumente $\vec r', t'$

Argumente $\vec r, t$

Umkehrtransformationen?

elm. Feld !

Aufgabe 3
Nützlichkeit!

z.B.

$$E_y' = -\frac{\partial}{\partial y'}\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}A_y'$$

$$t = \gamma(V)\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right)$$

$$x = \gamma(V)\left(x' + Vt'\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{\partial t}{\partial t'}}_{\gamma(V)} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t'}}_{V\gamma(V)}$$

$$\neq \frac{1}{\frac{\partial t'}{\partial t}} \;!$$

$$\neq \frac{1}{\frac{\partial t'}{\partial x}}$$

$$E'_y = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial y'}}_{\frac{\partial}{\partial y}} \underbrace{\varphi'}_{\gamma(V)\left(\varphi - \frac{V}{c}A_x\right)} - \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}}_{\gamma(V)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{V}{c}\frac{\partial}{\partial x}\right)} \underbrace{A'_y}_{A_y}$$

$$E'_y = \gamma(V)\underbrace{\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}\right]}_{E_y}$$

$$-\frac{V}{c}\gamma(V)\underbrace{\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]}_{\mathrm{rot}_z\vec{A} = B_z}$$

$$E'_y = \gamma(V)\left[E_y - \frac{V}{c}B_z\right] \checkmark$$

Viererskalarfelder ("Feldskalare")

$$\boxed{\begin{aligned} I_1(\vec{r},t) &:= \vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{B}(\vec{r},t) \\ I_2(\vec{r},t) &:= \vec{B}^2(\vec{r},t) - \vec{E}^2(\vec{r},t) \end{aligned}}$$

1) Standard-LT ✓

2) räumliche Drehungen ✓

3) raumzeitliche Translationen ✓

$$I'_1(\vec{r}',t') = I_1(\vec{r},t)\,,\ I'_2(\vec{r}',t') = I_2(\vec{r},t)$$

Weitere "Feldskalare" $\nexists$.

$$u_{elm}(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2(\vec{r},t) + \vec{B}^2(\vec{r},t)\right)$$

kein Viererskalarfeld!

Folgerungen: Nützlichkeit!

(I) $\left.\begin{array}{l} I: \vec{E} \perp \vec{B} \\ |\vec{E}| = |\vec{B}| \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} I': \vec{E}' \perp \vec{B}' \\ |\vec{E}'| = |\vec{B}'| \end{array}\right.$

am selben Ereignis

$E: \; I: \; (ct, \vec{r})$

$\quad\;\; I': \; (ct', \vec{r}\,')$

(II) (ohne Beweis)

$\left.\begin{array}{l} I: \vec{E} \perp \vec{B} \\ \vec{E}^2 > \vec{B}^2 \\ [\vec{B}^2 > \vec{E}^2] \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists\, I' \text{ mit} \\ \vec{B}' = \vec{0} \\ [\vec{E}' = \vec{0}] \end{array}$

nicht in Standardkonfiguration zu I

(III) $\left.\begin{array}{l} I: \vec{E} = \vec{0} \\ [\vec{B} = \vec{0}] \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$\begin{array}{l} I': \vec{E}' \perp \vec{B}' \\ \vec{B}'^2 > \vec{E}'^2 \\ [\vec{E}'^2 > \vec{B}'^2] \end{array}, \quad \begin{array}{l} I'': \vec{E}'' \perp \vec{B}'' \\ \vec{B}''^2 > \vec{E}''^2 \\ [\vec{E}''^2 > \vec{B}''^2] \end{array}, \ldots$

Annahme: L-Kovarianz des Kraftgesetzes

$$\vec{K}_a(t) = q_a\left[\vec{E}(\vec{r}_a(t),t) + \frac{\vec{v}_a(t)}{c} \times \vec{B}(\vec{r}_a(t),t)\right]$$

$$\vec{K}_a'(t') = q_a\left[\vec{E}'(\vec{r}_a{}'(t'),t') + \frac{\vec{v}_a{}'(t')}{c} \times \vec{B}'(\vec{r}_a{}'(t'),t')\right]$$

Folgerung (unter Verwendung des Transformationsgesetzes für $\vec{E}, \vec{B}$)

Standard-LT

$$K_{ax}' = \frac{K_{ax} - \frac{V(\vec{K}_a \cdot \vec{v}_a)}{c^2}}{1 - \frac{v_{ax}V}{c^2}}$$

$$K_{ay}' = \frac{K_{ay}}{\gamma(V)\left(1 - \frac{v_{ax}V}{c^2}\right)}$$

$$K_{az}' = \frac{K_{az}}{\gamma(V)\left(1 - \frac{v_{ax}V}{c^2}\right)}$$ (Beweis später)

Dies sind aber gerade die Beziehungen, welche die L-Kovarianz der Bewegungsgleichungen garantieren.

Beweis des obigen Transformationsgesetzes

$\vec{K}_a \to \vec{K}_a'$ (Standard-LT)

Index a bei Teilchenbahn,
-geschwindigkeit, -kraft
weggelassen

$$\vec{K}(t) = q\left[\vec{E}(\vec{r}(t),t) + \frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}(\vec{r}(t),t)\right]$$

$$\vec{K}'(t') = q\left[\vec{E}'(\vec{r}'(t'),t') + \frac{\vec{v}'(t')}{c}\times\vec{B}'(\vec{r}'(t'),t')\right]$$

$$v_x'(t') = \frac{v_x(t) - V}{1 - \frac{v_x(t)V}{c^2}}$$

$$v_y'(t') = \frac{v_y(t)}{\gamma(V)\left(1 - \frac{v_x(t)V}{c^2}\right)}$$

$$v_z'(t') = \frac{v_z(t)}{\gamma(V)\left(1 - \frac{v_x(t)V}{c^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\gamma(v')}{\gamma(v)} = \gamma(V)\left(1 - \frac{v_xV}{c^2}\right)$$

d.h.

$$\frac{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}{1 - \frac{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2}{c^2}} = \frac{\left(1 - \frac{v_xV}{c^2}\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Eleganter:

$$(v^\mu) = \gamma(v)\,(c, \vec{v}) \quad , \quad (v^{\mu\prime}) = \gamma(v')\,(c, \vec{v}\,')$$

$$v^{0\prime} = \gamma(V)\,\left(v^0 - \frac{V}{c} v^1\right)$$

$$\gamma(v')c = \gamma(V)\,\left(\gamma(v)c - \frac{V}{c}\gamma(v)\,v_x\right)$$

$$= \gamma(v)\gamma(V)\,\left(c - \frac{V v_x}{c}\right)$$

$$\frac{\gamma(v')}{\gamma(v)} = \gamma(V)\,\left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right) \quad \checkmark$$

$$K'_x = q\left[E'_x + \frac{v'_y}{c}B'_z - \frac{v'_z}{c}B'_y\right]$$

$$E_x$$

$$\frac{v_y}{\cancel{\gamma(V)}\left(1-\frac{v_x V}{c^2}\right)} \qquad \frac{v_z}{\cancel{\gamma(V)}\left(1-\frac{v_x V}{c^2}\right)}$$

$$\cancel{\gamma(V)}\left(B_z - \frac{V}{c}E_y\right)$$

$$\cancel{\gamma(V)}\left(B_y + \frac{V}{c}E_z\right)$$

$$K'_x = q\left[E_x + \frac{\frac{v_y}{c}\left(B_z - \frac{V}{c}E_y\right)}{1-\frac{v_x V}{c^2}} - \frac{\frac{v_z}{c}\left(B_y + \frac{V}{c}E_z\right)}{1-\frac{v_x V}{c^2}}\right]$$

$$= \frac{\cancel{q}}{1-\frac{v_x V}{c^2}}\left[\underbrace{E_x + \frac{v_y}{c}B_z - \frac{v_z}{c}B_y}_{\frac{1}{\cancel{q}}K_x} \underbrace{- \frac{v_x V}{c^2}E_x - \frac{v_y V}{c^2}E_y - \frac{v_z V}{c^2}E_z}_{-\frac{V(\vec{E}\cdot\vec{v})}{c^2} = -\frac{1}{\cancel{q}}\frac{V(\vec{K}\cdot\vec{v})}{c^2}}\right]$$

$$\vec{K}\cdot\vec{v} = q\vec{E}\cdot\vec{v}$$

$$K_x' = \frac{K_x - \frac{V(\vec{K}\cdot\vec{v})}{c^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \quad \checkmark$$

Beweis, daß dieses Transformationsgesetz für $\vec{K}$ gleichwertig zur Aussage ist, daß $\underline{\mathcal{K}}$ Vierervektor ist

$$(\mathcal{K}^\mu) = \gamma(v)\left(\frac{\vec{K}\cdot\vec{v}}{c}, \vec{K}\right)$$

Standard-LT

$$ct' = \gamma(V)\left(ct - \frac{V}{c}x\right)$$

$$x' = \gamma(V)\left(x - \frac{V}{c}ct\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\left[\mathcal{K}^{0'} = \gamma(V)\left(\mathcal{K}^0 - \frac{V}{c}\mathcal{K}^1\right)\right] \text{ redundant}$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{K}^{1'} = \gamma(V)\left(\mathcal{K}^1 - \frac{V}{c}\mathcal{K}^0\right)$$

$$\mathcal{K}^{2'} = \mathcal{K}^2$$

$$\mathcal{K}^{3'} = \mathcal{K}^3$$

$$\cancel{\gamma(v')}K_x' \left(= \gamma(V)\left(\gamma(v)K_x - \frac{V}{c}\gamma(v)\frac{\vec{K}\cdot\vec{v}}{c}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\gamma(V)\gamma(v)}_{\frac{\cancel{\gamma(v')}}{1 - v_x V/c^2}}\left(K_x - \frac{V(\vec{K}\cdot\vec{v})}{c^2}\right) \quad \checkmark$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{m_a\vec{v}_a(t)}{\sqrt{1-\frac{v_a^2(t)}{c^2}}}}_{\vec{p}_a(t)} = \vec{K}_a(t)$$ L-kovariant

<u>Offensichtlich</u> L-kovariante Form der BG:

$$\boxed{m_a \underline{\beta}_a = \underline{\mathcal{K}}_a} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{d\underline{p}_a}{d\tau_a} = \underline{\mathcal{K}}_a} \qquad (*)$$

mit

$$(\mathcal{K}_a^\mu) = \gamma(v_a)\left(\frac{\vec{K}_a\cdot\vec{v}_a}{c}, \vec{K}_a\right)$$ Lorentz-Viererkraft (Minkowskikraft) [$\vec{K}_a$ Lorentz-(Dreier-) kraft]

$$\underline{\beta}_a = \frac{d\underline{v}_a}{d\tau_a}$$ Viererbeschleunigung

$$\underline{p}_a = m_a \underline{v}_a$$ Viererimpuls, $m_a\underline{\beta}_a = \frac{d\underline{p}_a}{d\tau_a}$

I: Wegen $(v_a^\mu) = \gamma(v_a)(c, \vec{v}_a)$

gilt $(p_a^\mu) = \gamma(v_a)(m_a c, m_a\vec{v}_a)$

! $= \left(\frac{E_a}{c}, \vec{p}_a\right)$ $\quad E_a = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} = \gamma(v_a) m_a c^2$

Komponentenzerlegung von (*) bzgl. I:

1-, 2-, 3- Komponente:

$$\underbrace{\frac{d}{d\tau_a}}_{\gamma(v_a)\frac{d}{dt}}\vec{p}_a = \gamma(v_a)\vec{K}_a, \text{ also } \frac{d\vec{p}_a(t)}{dt} = \vec{K}_a(t) \checkmark$$

0-Komponente:

$$\underbrace{\frac{d}{d\tau_a}}_{\text{s. oben}}\frac{E_a}{\cancel{c}} = \gamma(v_a)\frac{\vec{K}_a\cdot\vec{v}_a}{\cancel{c}}, \text{ also } \frac{dE_a(t)}{dt} = \vec{K}_a(t)\cdot\vec{v}_a(t) \checkmark$$

redundante Information!

"AUSSER KONKURRENZ"

Feldtensor (kontravariante Komponenten)

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

$$(F^{\mu\nu}) = \quad (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \mp E_x & \mp E_y & \mp E_z \\ \pm E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \pm E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \pm E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\partial^\mu) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$$

$$(A^\mu) = (\varphi, \vec{A})$$

Feldtensor (kovariante Komponenten)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$ s. oben

$$(\partial_\mu) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, +\vec{\nabla}\right)$$

$$(A_\mu) = (\varphi, -\vec{A})$$

FG : Mx

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$

0-Komponente

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

1-2-3-Komponenten

$$\varepsilon^{\sigma\lambda\mu\nu}\partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0$$

$$(\partial_\mu F^{\mu\nu}_{dual} = 0)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

"Verkettungsterme" !

KG ("vorläufig") : L

$$(v_a^{\mu}) = \gamma(v_a)\,(c, \vec{v}_a)$$

$$(v_{a,\mu}) = \gamma(v_a)\,(c, -\vec{v}_a)$$

$$\mathcal{K}_a^\mu = \frac{q_a}{c} F^{\mu\lambda} v_{a,\lambda}$$

$$\vec{K}_a = q_a\left[\vec{E} + \frac{\vec{v}_a}{c}\times\vec{B}\right]$$

($\mathcal{K}_a^0$ redundant)

BG ("vorläufig") : Einstein

$$m_a \beta_a^\mu = \mathcal{K}_a^\mu \,, \quad a = 1, 2, \ldots, N$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m_a \vec{v}_a}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} = \vec{K}_a$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} = \vec{v}_a\cdot\vec{K}_a \quad \text{redundant}\right)$$

$$\equiv \frac{dp_a^\mu}{d\tau_a}$$