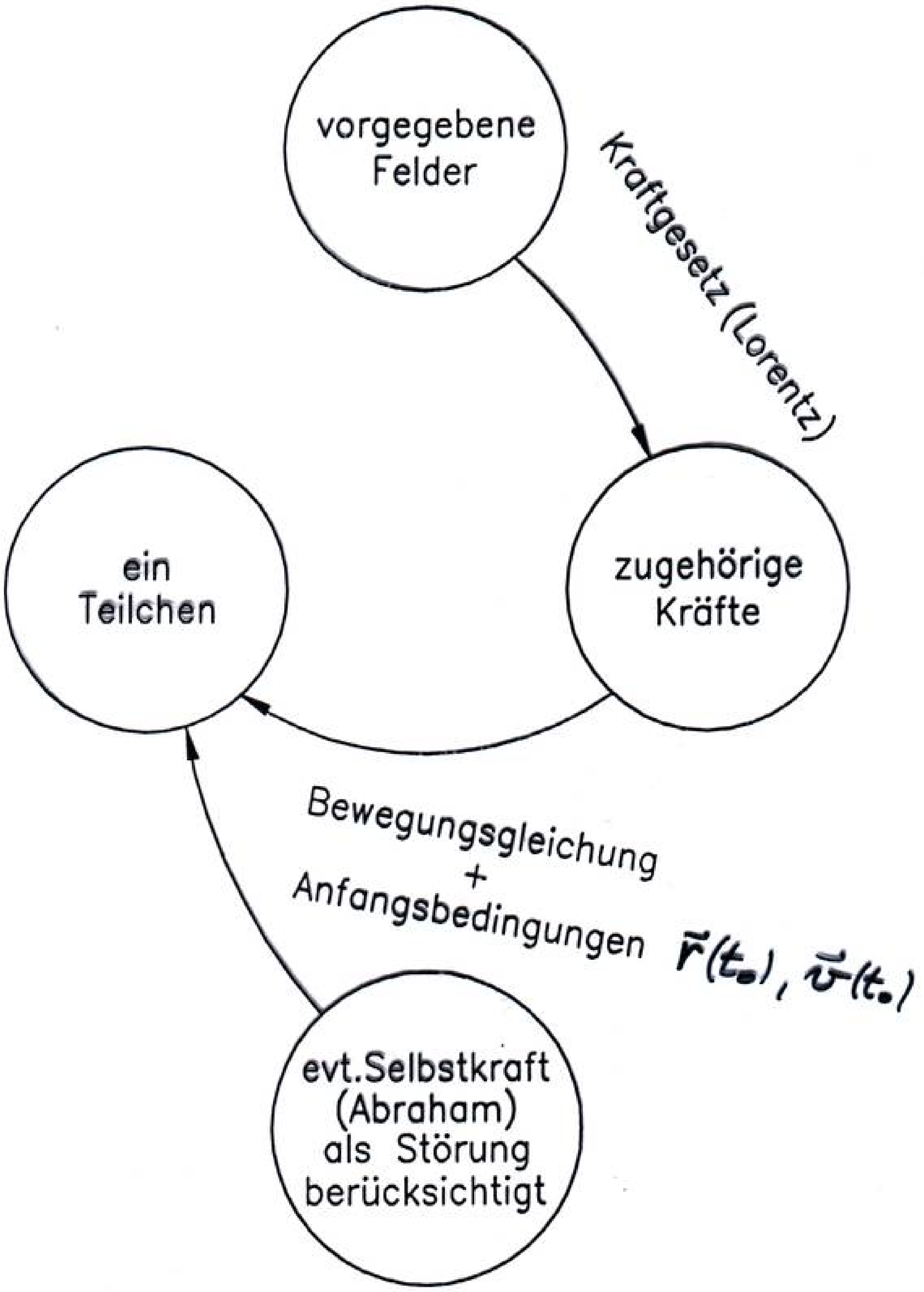
3. GA: Bewegung einer Punktladung in einem vorgegebenen elm. Feld



vorgegebene Felder:

$$\vec{E}^{(ex)}_{ret}(\vec{r},t) + \vec{E}^{(ein)}(\vec{r},t) =: \vec{E}^{(ex,g)}(\vec{r},t)$$

$$\vec{B}^{(ex)}_{ret}(\vec{r},t) + \vec{B}^{(ein)}(\vec{r},t) =: \vec{B}^{(ex,g)}(\vec{r},t)$$

Zugehörige Kräfte:

$$\vec{K}^{(ex,q)}(t) = q\left[\vec{E}^{(ex,q)}(\vec{r}(t),t) + \frac{\vec{v}(t)}{c} \times \vec{B}^{(ex,q)}(\vec{r}(t),t)\right]$$
$$= \vec{K}^{(ex,q)}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$$

Gesamtkraft auf die Ladung:

$$\vec{K}(t) = \vec{K}^{(ex,q)}(t) + \vec{K}^{(rad)}(t)$$

Bewegungsgleichung + AB:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = \vec{K}(t)$$

$\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)$ vorgegeben

ACHTUNG: Da $\vec{K}^{(rad)}(t) = \vec{K}^{(rad)}(\vec{v}(t), \vec{b}(t), \dot{\vec{b}}(t))$

muß man entweder

Fall 1: $\vec{K}^{(rad)}$ "weglassen"

VS: Vernachlässigbarkeit von $\vec{K}^{(rad)}$ gegenüber $\vec{K}^{(ex,q)}$; s. später

oder

Fall 2: $\vec{K}^{(rad)}$ nur als "Störung" berücksichtigen; wie man dies macht s. später

VS: $\vec{K}^{(rad)}$ zwar nicht gänzlich vernach=lässigbar gegen $\vec{K}^{(ex,q)}$, führt aber nur (während der "Beobachtungsdauer" oder "Versuchsdauer") zu schwacher "Korrektur" der Bahnkurve

Fall 3: Falls $\vec{K}^{(rad)}$ "mehr als nur Störung":

BG modifizieren (durch "geeignete" Integro-Dgl. ersetzen; s. Rohrlich Abschnitt 6-6).

Später (Abschnitt über Abstrahlung) zeigen wir:

$\vec{K}^{(rad)}$ muß in BG (d.h. für die Berechnung der Teilchenbahn) nur dann berücksichtigt werden, falls

(a) $|\vec{v}(t)|$ nahe an c kommt (ist)

(b) sich der Bewegungzustand der Ladung in Zeitintervallen der Größenordnung

$$\Delta\tau := \frac{2q^2}{3mc^3}$$

(also wegen (a) auf Strecken der Größenordnung $c\Delta\tau = \frac{2q^2}{3mc^2}$)

merklich ändert.

Elektron: $\Delta\tau \approx 6\cdot 10^{-24}\,\text{sec}$, $c\Delta\tau \approx 2\cdot 10^{-13}\,\text{cm}$!

Proton: $\Delta\tau \approx 3\cdot 10^{-27}\,\text{sec}$, $c\Delta\tau \approx 10^{-16}\,\text{cm}$

Beschleuniger: $\vec{K}^{(rad)}$ muß nur für "ultrarelativistische" Elektronen in Kreisbeschleunigern für die Berechnung von $\vec{r}(t)$ berücksichtigt werden!

Cornell Elektron-Synchrotron (Bahnradius ~100m):

Strahlungsverluste / Umlauf

T	$\frac{v}{c} \cdot 100\%$	$\Delta E^{(\mathrm{rad})}$
$300\ \mathrm{MeV} = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{eV}$	$99{,}99986$	$10^2\ \mathrm{eV}$
$1\ \mathrm{GeV} = 10^9\ \mathrm{eV}$	$99{,}999987$	$3 \cdot 10^4\ \mathrm{eV}$
$2\ \mathrm{GeV} = 2 \cdot 10^9\ \mathrm{eV}$	$99{,}999997$	$2{,}4 \cdot 10^5\ \mathrm{eV}$
$10\ \mathrm{GeV} = 10^{10}\ \mathrm{eV}$	$99{,}99999987$ *)	$0{,}9 \cdot 10^7\ \mathrm{eV}$

Im folgenden Vernachlässigung von $\vec{K}^{(\mathrm{rad})}$!

*) $\gamma \approx 2 \cdot 10^4$!

BG

$$\boxed{\frac{d}{dt}\overbrace{\frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}}^{\vec{p}(t)} = q\left[\vec{E}^{(ex,q)}(\vec{r}(t),t) + \frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}^{(ex,q)}(\vec{r}(t),t)\right]} \qquad \left(= \vec{K}^{(ex,q)}(t)\right)$$

Für beliebige AB $\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)$ $\exists$ eindeutig bestimmte Lösung,

aber: komplziertes nichtlineares Simultansystem, das für zeitabhängige inhomogene Felder nur numerisch lösbar ist.

Anwendungen: Elektronenoptik, Plasmaphysik, Geophysik.

BG $\Longrightarrow$ AS

$$\frac{d}{dt}\frac{\overbrace{mc^2}^{E(t)}}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = q\,\vec{v}(t)\cdot\vec{E}^{(ex,q)}(\vec{r}(t),t) \qquad \left(= \vec{K}^{(ex,q)}(t)\cdot\vec{v}(t)\right)$$

BG (alternative Form)

$$m\vec{b}(t) = q\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\left[\vec{E}^{(ex,q)}(\vec{r}(t),t) + \frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}^{(ex,q)}(\vec{r}(t),t) - \frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{E}^{(ex,q)}(\vec{r}(t),t)}{c^2}\,\vec{v}(t)\right]$$

$\vec{b}(t)$ i.a. $\not\propto$ $\vec{K}(t)$! BEGRIFF DER TRÄGEN MASSE !

$$\underbrace{\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}}_{=:\, \cancel{m_{rel}(t)}} \vec{b}(t) = q\left[\vec{E}^{(ex,q)}(\vec{r}(t),t) + \frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}^{(ex,q)}(\vec{r}(t),t) - \frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{E}^{(ex,q)}(\vec{r}(t),t)}{c^2}\overset{\vec{v}(t)}{\vdots}\right]$$

<u>Nicht sinnvoll</u>, wenn man ursprünglichen physikalischen Inhalt ("träge" Masse charakterisiert "Trägheit") nicht aufgeben will.

Dagegen: Im momentanen inertialen Ruhsystem $\tilde{I}$ gilt wegen $\vec{\tilde{v}}(\tilde{t}) = \vec{0}$

$$m\,\vec{\tilde{b}}(\tilde{t}) = \vec{\tilde{K}}^{(ex,q)}(\tilde{t}) = q\,\vec{\tilde{E}}^{(ex,q)}(\vec{\tilde{r}}(\tilde{t}),\tilde{t})$$

invariante (träge) Masse
des Teilchens ("Ruhmasse")

Spezialfall: Homogene statische Felder

$\vec{E}^{(ex,g)} = \vec{E}^{(ex)}_{ret} \equiv \vec{E}^{(ex)}$ geschrieben, analog "$\vec{B}$-Feld"

(kein Strahlungsfeld $\vec{E}^{(ein)}, \vec{B}^{(ein)}$ vorhanden)

BG

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = q\left[\vec{E}^{(ex)} + \frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}^{(ex)}\right]}$$

"Noch immer" nichtlineares Simultansystem, aber: für beliebige vorg. Felder $\vec{E}^{(ex)}, \vec{B}^{(ex)}$ und beliebige AB $\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)$ exakt analytisch lösbar ("geschickt" muß man sein ...)

$\Rightarrow$ AS

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = q\,\vec{v}(t)\cdot\vec{E}^{(ex)}$$

BG (alternative Form)

$$m\vec{b}(t) = q\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\left[\vec{E}^{(ex)} + \frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}^{(ex)} - \frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{E}^{(ex)}}{c^2}\vec{v}(t)\right]$$

Einfache Sonderfälle: $\vec{B}^{(ex)} = \vec{0}$: Teilchen im elektrischen Feld

$\vec{E}^{(ex)} = \vec{0}$: Teilchen im Magnetfeld

Wie ist man "geschickt", wenn kein "Sonderfall" vorliegt?

Mögliche Fälle:

Fall 1: $I: \ \vec{E}^{(ex)} \perp \vec{B}^{(ex)}, \ |\vec{E}^{(ex)}| > |\vec{B}^{(ex)}|$

$\Rightarrow \exists I'$ mit $\vec{B}^{(ex)'} = \vec{0}$

Rechnen in I': Teilchen im elektrischen Feld

LT $\vec{r}'(t') \longrightarrow \vec{r}(t)$

Fall 2: $I: \ \vec{E}^{(ex)} \perp \vec{B}^{(ex)}, \ |\vec{E}^{(ex)}| < |\vec{B}^{(ex)}|$

$\Rightarrow \exists I'$ mit $\vec{E}^{(ex)'} = \vec{0}$

Rechnen in I': Teilchen im Magnetfeld

LT $\vec{r}'(t') \longrightarrow \vec{r}(t)$

Fall 3: $I: \ \vec{E}^{(ex)} \perp \vec{B}^{(ex)}, \ |\vec{E}^{(ex)}| = |\vec{B}^{(ex)}|$

Rechnen in I: Teilchen in "gekreuzten" Feldern mit gleichem Betrag

Fall 4: $I: \ \vec{E}^{(ex)} \not\perp \vec{B}^{(ex)}$

Falls $\vec{E}^{(ex)} \parallel \vec{B}^{(ex)}$ Rechnen in I, falls

$\vec{E}^{(ex)} \nparallel \vec{B}^{(ex)} \Rightarrow \exists I'$ mit $\vec{E}^{(ex)'} \parallel \vec{B}^{(ex)'}$

und man rechnet in I' und transformiert $\vec{r}'(t')$

$\longrightarrow \vec{r}(t)$

In beiden Unterfällen: Teilchen in parallelen Feldern.

Landau-Lifschitz Bd. II, § 20, 21, 22:
Alle möglichen Fälle exakt gelöst.

$\parallel$ soll im folgenden überall als $\propto$ verstanden werden

Hier nur die Sonderfälle, und auch diese nur qualitativ behandelt.

Teilchen im homogenen elektrostatischen Feld

BG
$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = q\vec{E}^{(ex)}$$

$\Rightarrow$ AS
$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = q\vec{v}(t)\cdot\vec{E}^{(ex)}$$

BG (alternative Form)

$$m\vec{b}(t) = q\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\left[\vec{E}^{(ex)} - \frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{E}^{(ex)}}{c^2}\vec{v}(t)\right] \qquad (*)$$

$t_0 = 0$ gewählt

Fall 1: Anfangsgeschwindigkeit $\parallel$ Feldrichtung (longitudinales Feld – Linearbeschleuniger)

Gl. $(*)$ benützt:

$$\vec{v}(0) \parallel \vec{E}^{(ex)} \Longrightarrow \vec{b}(0) \parallel \vec{E}^{(ex)} \Rightarrow$$

$$\vec{v}(dt) = \vec{v}(0) + \vec{b}(0)\,dt \parallel \vec{E}^{(ex)} \quad \text{usf.}$$

$q>0$ $\qquad$ $q<0$

geradlinig beschleunigte Bewegung in (oder gegen) Feldrichtung (Aufgabe 4):

$$|\vec{v}(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} c \,, \quad |\vec{b}(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

(Newtongl.: gleichmäßig beschleunigte lineare Bewegung)

Beachte: In diesem Fall gilt wegen $\vec{v}(t) \parallel \vec{E}^{(ex)}$

$$m\vec{b}(t) = q\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\,\underbrace{\left[\vec{E}^{(ex)} - \underbrace{\frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{E}^{(ex)}}{c^2}\,\vec{v}(t)}_{\frac{v^2(t)}{c^2}\vec{E}^{(ex)}}\right]}_{\left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)\vec{E}^{(ex)}}$$

$$\underbrace{\frac{m}{\left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{3/2}}}_{\cancel{m_{long}(t)}}\,\vec{b}(t) = q\vec{E}^{(ex)} = \vec{K}^{(ex)}$$

$(\neq m_{rel}(t)\ !)$

Fall 2: Anfangsgeschwindigkeit nicht $\parallel$ Feldrichtung

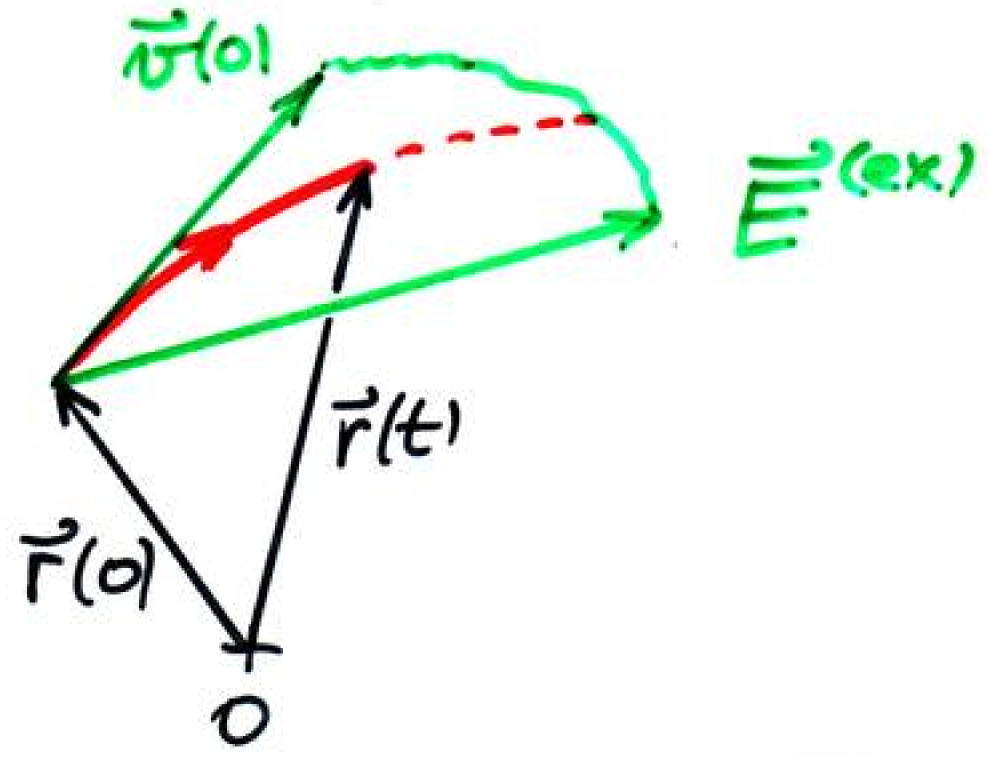
Gl. (*) benützt:

$\vec{v}(0), \vec{E}^{(ex)}$ spannen Ebene auf, $\vec{b}(0) \nparallel \vec{E}^{(ex)}$ (also nicht $\parallel \vec{K}^{(ex)}$), aber $\vec{b}(0)$ in Ebene von $\vec{v}(0), \vec{E}^{(ex)}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}(dt) = \vec{v}(0) + \vec{b}(0)\,dt$ in Ebene von $\vec{v}(0), \vec{E}^{(ex)}$ etc.

beschleunigte Bewegung längs einer gekrümmten ebenen Bahn: Rechnung gibt "Kettenlinie" (Hyperbelfunktion) ($\longleftrightarrow$ Newtongl.: Parabelbahn)

$$|\vec{v}(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} c, \qquad |\vec{b}(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Skizze für $q > 0$:



Spezialfall: $\vec{v}(0) \perp \vec{E}^{(ex)}$ "~~transversales~~ Feld"

$\vec{v}(t) \not\perp \vec{E}^{(ex)}$ für $t > 0$

"Historisch": $t = 0$:

$$m\vec{b}(0) = q\sqrt{1-\frac{v^2(0)}{c^2}}\,\vec{E}^{(ex)}$$

$$\underbrace{\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2(0)}{c^2}}}}_{\cancel{m_{trans}(0)}}\,\vec{b}(0) = q\vec{E}^{(ex)} = \vec{K}^{(ex)}$$

$(= m_{rel}(0))$

Ist gar keine BG!

$(\vec{b}(t) \nparallel \vec{K}^{(ex)}!)$

Teilchen im homogenen magnetostatischen Feld

BG $$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = q\left[\frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}^{(ex)}\right]$$

$\Rightarrow$ AS $$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = 0$$

BG (alternative Form)

$$m\vec{b}(t) = q\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\left[\frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}^{(ex)}\right]$$

AS $\Longrightarrow$ $|\vec{v}(t)| = v(t) = v(0) \equiv v$

$$\Rightarrow \qquad \vec{b}(t) = \frac{q\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m}\left[\frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}^{(ex)}\right]$$

Newtongl. (+ Lorentzkraft): einziger Unterschied:
der (zeitunabhängige) Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ "fehlt"

Beachte:

$$\underbrace{\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\cancel{m_{rel}}}\vec{b}(t) = q\left[\frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}^{(ex)}\right] = \vec{K}^{(ex)}$$

$$\vec{b}(t) = \frac{q\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m}\left[\frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}^{(ex)}\right]$$

Fall 1: $\vec{v}(0) \parallel \vec{B}^{(ex)}$ (longitudinales Feld)

$$\vec{v}(0) \parallel \vec{B}^{(ex)} \Rightarrow \vec{b}(0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(dt) = \vec{v}(0) + \vec{b}(0)dt$$
$$= \vec{v}(0) \text{ usf.}$$

gleichförmig geradlinige (da kräftefreie) Bewegung $\parallel$ Feldrichtung

Fall 2: $\vec{v}(0) \perp \vec{B}^{(ex)}$ (transversales Feld)

$$\vec{v}(0) \perp \vec{B}^{(ex)} \Rightarrow \vec{b}(0) \perp \vec{v}(0), \quad \vec{b}(0) \perp \vec{B}^{(ex)}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(dt) = \vec{v}(0) + \vec{b}(0)dt \perp \vec{B}^{(ex)},$$

also wegen $|\vec{v}(t)| = v(t) = v(0) \equiv v$

gleichförmige Kreisbewegung in einer zur Feldrichtung senkrechten Ebene

Rechnung gibt als Kreisfrequenz der Bahnbewegung

$$\omega_c = \frac{|q|B^{(ex)}}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

und als Radius der Kreisbahn $r_c = \frac{v}{\omega_c}$

Newtongl. (+ Lorentzkraft): einziger Unterschied: anstelle von ω_c tritt

$$(\omega_c)_{\text{nichtrel}} = \frac{|q|B^{(ex)}}{mc}$$

Bemerkung: Mit der Eigenzeit τ des Teilchens

$$\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, t \qquad (t=0 \leftrightarrow \tau = 0)$$

gilt $\quad (\omega_c)_{\text{nichtrel}}\, \tau = \omega_c t \qquad$ (Geschichtchen: "Weil...")

Fall 3: $\vec{v}(0) = \underbrace{\vec{v}_{\parallel}(0)}_{\neq \vec{0}} + \underbrace{\vec{v}_{\perp}(0)}_{\neq \vec{0}}$, $\parallel$ bzw. $\perp$ bzgl. $\vec{B}^{(ex)}$

$$\vec{b}(t) = \frac{q\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m}\left[\frac{\vec{v}(t)}{c} \times \vec{B}^{(ex)}\right]$$

Ansatz: $\quad \vec{v}(t) = \vec{v}_{\parallel}(t) + \vec{v}_{\perp}(t)\ , \quad \vec{b}(t) = \vec{b}_{\parallel}(t) + \vec{b}_{\perp}(t)$

$\Rightarrow$

$$\vec{b}_{\parallel}(t) + \vec{b}_{\perp}(t) = \frac{q\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m}\underbrace{\left[\frac{\vec{v}_{\perp}(t)}{c} \times \vec{B}^{(ex)}\right]}_{\perp \vec{B}^{(ex)}}, \quad \Rightarrow$$

wobei $v^2 = v_{\parallel}^2(0) + v_{\perp}^2(0)$

1) $\vec{b}_{\parallel}(t) = \vec{0}\ , \quad \vec{v}_{\parallel}(t) = \vec{v}_{\parallel}(0)$ gleichf. geradl. Bewegung $\parallel \vec{B}^{(ex)}$

2) $\vec{b}_{\perp}(t) = \dfrac{q\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m}\left(\dfrac{\vec{v}_{\perp}(t)}{c} \times \vec{B}^{(ex)}\right)$

gleichförmige Kreisbewegung in Ebene $\perp \vec{B}^{(ex)}$

mit

$$\omega_c = \frac{|q|B^{(ex)}}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad \left(v^2 = v_{\parallel}^2(0) + v_{\perp}^2(0),\ \text{nicht } v_{\perp}^2(0) \text{ "allein"!}\right)$$

$$r_c = \frac{v_{\perp}(0)}{\omega_c}$$

1) + 2): gleichförmige Bewegung längs einer Schraubenlinie mit $v(0)$ (= Überlagerung einer gleichf. geradl. Bewegung $\parallel \vec{B}^{(ex)}$ mit $v_{\parallel}(0)$ und einer gleichf. Kreisbewegung $\perp \vec{B}^{(ex)}$ mit $v_{\perp}(0)$)

Zeichnung für
$q > 0$