Beschleunigt bewegte Punktladung

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left[\frac{q}{\gamma^2(v)\,|g|^3 R^2}\,(\vec{n}-\vec{\beta})\right]_{ret}$$

$$+\left[\frac{q}{c\,|g|^3 R}\left\{\vec{n}\times\left((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right)\right\}\right]_{ret}$$

$$= \vec{E}_v(\vec{r},t) + \vec{E}_b(\vec{r},t)$$

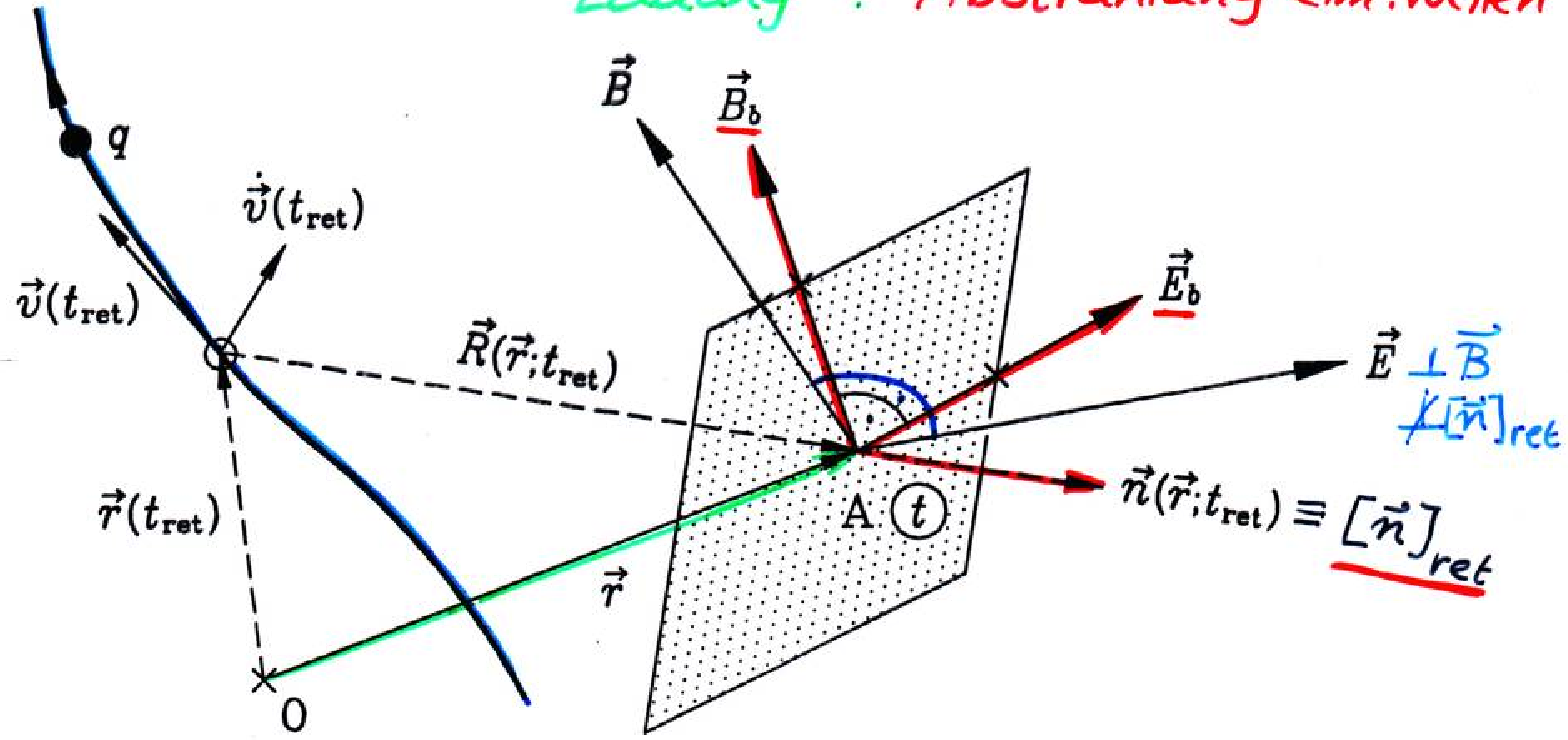
$$\vec{B}(\vec{r},t) = [\vec{n}]_{ret}\times\vec{E}_v(\vec{r},t) + [\vec{n}]_{ret}\times\vec{E}_b(\vec{r},t)$$

$$= \vec{B}_v(\vec{r},t) + \vec{B}_b(\vec{r},t) = [\vec{n}]_{ret}\times\vec{E}(\vec{r},t)$$

$\vec{E}_v, \vec{B}_v : \sim \frac{1}{R^2}$ "bleibt bei der Ladung"

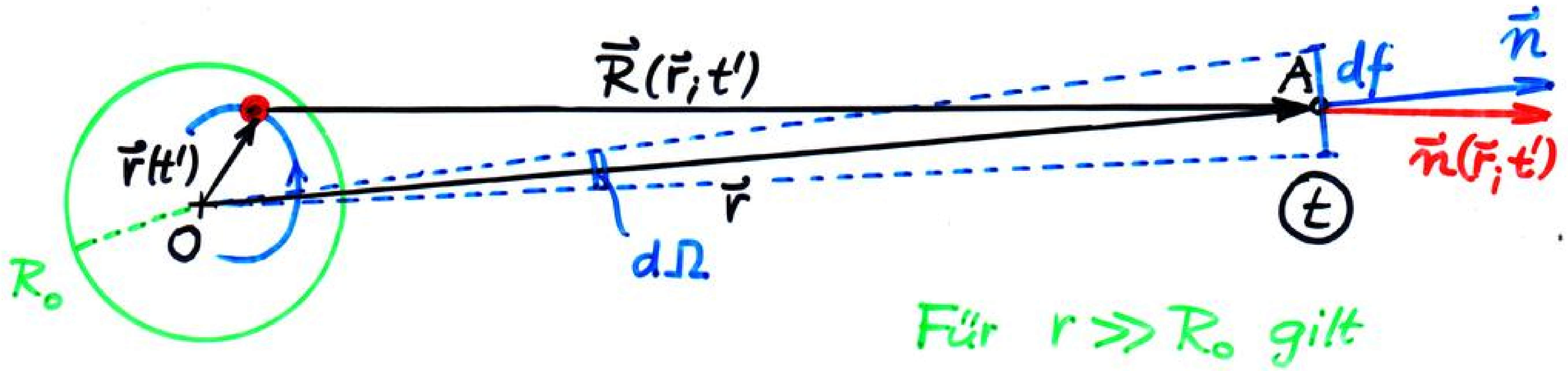
Verallgemeinertes Coulombfeld

$\vec{E}_b, \vec{B}_b : \sim \frac{1}{R}$ "löst sich teilweise von der Ladung": Abstrahlung elm. Wellen



$\boxed{[\vec{n}]_{ret},\ \vec{E}_b,\ \vec{B}_b \text{ orth. DB (RS)} \quad |\vec{E}_b| = |\vec{B}_b|}$

$\vec{E} \not\perp [\vec{n}]_{ret},\ |\vec{E}| \neq |\vec{B}|$



Für $r \gg R_0$ gilt

$\vec{n}(\vec{r};t')\cdot\vec{n} > 0,\ \forall t',\quad R(\vec{r};t') \sim r,\ \forall t'$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}_v \times \vec{B}_v) \qquad \sim \frac{1}{r^4},\ \forall t$$

$$+\frac{c}{4\pi}(\vec{E}_v \times \vec{B}_b) \qquad \sim \frac{1}{r^3},\ \forall t$$

$$+\frac{c}{4\pi}(\vec{E}_b \times \vec{B}_v) \qquad \sim \frac{1}{r^3},\ \forall t$$

$$+\underbrace{\frac{c}{4\pi}(\vec{E}_b \times \vec{B}_b)}_{=:\vec{S}_b} \qquad \sim \frac{1}{r^2},\ \forall t$$

Folge:

$$\lim_{r\to+\infty}[\vec{S}(\vec{r},t)\cdot \underbrace{d\vec{f}}_{\vec{n}\,\underbrace{r^2 d\Omega}_{df}}] = \underbrace{\lim_{r\to+\infty}[\vec{S}_b(\vec{r},t)\cdot \overbrace{d\vec{f}}^{\vec{n}\,df}]}_{\text{endlich (zeitabhängig)}\ \geq 0^{*)}}$$

Abstrahlung!

$$\vec{S}_b = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}_b \times \vec{B}_b) = \underbrace{\frac{c}{4\pi}\vec{E}_b^2}\,[\vec{n}]_{ret}$$

*) denn: ≥ 0 und

$[\vec{n}]_{ret}\cdot\vec{n} > 0$

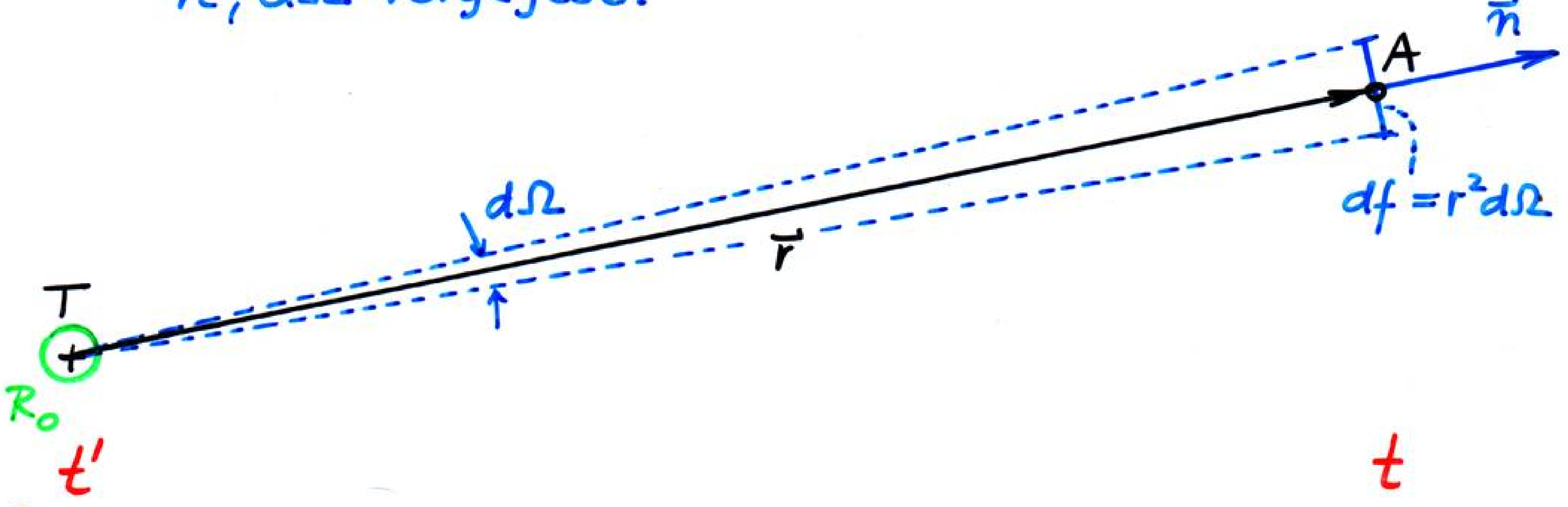
$$\vec{S}_b(\vec{r},t) = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}_b(\vec{r},t)\right]^2 [\vec{n}]_{ret}$$

$$\vec{E}_b(\vec{r},t) = \left[\frac{q}{c|g|^3 R}\left\{\vec{n} \times \left(\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right) \times \frac{\dot{\vec{v}}}{c}\right)\right\}\right]_{ret}$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{S}_b(\vec{r},t) = \frac{q^2}{4\pi c}\left[\frac{\left\{\vec{n} \times \left(\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right) \times \frac{\dot{\vec{v}}}{c}\right)\right\}^2}{\left(1 - \vec{n}\cdot\frac{\vec{v}}{c}\right)^6 R^2}\,\vec{n}\right]_{ret}$$

$\vec{n}$, $d\Omega$ vorgegeben



[retardierter Zeitpunkt zu t in A, d.h. $t' = t_{ret}(\vec{r}, t)$]

dann gilt
$$t - t' = \frac{R(\vec{r}; t')}{c}$$

$$\Longrightarrow \quad t' = t_{ret}(\vec{r}, t)$$

bzw.
$$t = t(\vec{r}; t') = t' + \frac{R(\vec{r}; t')}{c}$$

Abstrahlung in $d\Omega$ um $\vec{n}$ im Zeitintervall $T_1 \le t' \le T_2$ der Teilchenbewegung:

konstant

T: $T_1 \le t' \le T_2$

A: $t_1(\vec{r}) \le t \le t_2(\vec{r})$

mit
$$t_i(\vec{r}) = t(\vec{r}; T_i) = T_i + \frac{R(\vec{r}; T_i)}{c}$$

Intervalle verschieden lang

$$t_2(\vec{r}) - t_1(\vec{r}) = T_2 - T_1 + \frac{R(\vec{r}; T_2)}{c} - \frac{R(\vec{r}; T_1)}{c}$$

gesamte von der Ladung während des Beschleunigungsintervalles $T_1 \leq t' \leq T_2$ in $d\Omega$ um $\vec{n}$ abgestrahlte Energie

= gesamte im Zeitintervall $t_1(\vec{r}) \leq t \leq t_2(\vec{r})$ durch $df = r^2 d\Omega$ in A nach außen strömende Energie $(d\vec{f} = \vec{n}\, df)$ $[\vec{r} = r\vec{n}\,,\ r \to +\infty]$

$$= \lim_{r\to+\infty} \int_{t_1(\vec{r})}^{t_2(\vec{r})} dt\ \vec{S}(\vec{r},t)\cdot \overbrace{\vec{n}\, r^2 d\Omega}^{d\vec{f}}$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \int_{t_1(\vec{r})}^{t_2(\vec{r})} dt\ \vec{S}_b(\vec{r},t)\cdot \overbrace{\vec{n}\, r^2 d\Omega}^{d\vec{f}}$$

d.h. $t' = t_{ret}(\vec{r},t)$

$[\vec{n}]_{ret}$!

$$= \lim_{r\to+\infty} \int_{t_1(\vec{r})}^{t_2(\vec{r})} dt\ \frac{q^2}{4\pi c}\left[\frac{\{\vec{n}\times((\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c})\times\frac{\dot{\vec{v}}}{c})\}^2}{(1-\vec{n}\cdot\frac{\vec{v}}{c})^6 R^2}\,\vec{n}\right]_{ret}\cdot\vec{n}\, r^2 d\Omega$$

Variablensubstitution: $t \to t'$ $(r, \vec{n}$, also $\vec{r} = r\vec{n}$ fest$)$

$$t = t' + \frac{R(\vec{r},t')}{c}$$

$$\Rightarrow \quad dt = \left(1 - \vec{n}(\vec{r},t')\cdot\frac{\vec{v}(t')}{c}\right)dt'$$

$$t = t_1(\vec{r}) \longleftrightarrow t' = T_1$$

$$t = t_2(\vec{r}) \longleftrightarrow t' = T_2$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \int_{T_1}^{T_2} dt' \, \frac{q^2}{4\pi c} \, \frac{\left\{\vec{n}(\vec{r},t') \times \left(\left(\vec{n}(\vec{r},t') - \frac{\vec{v}(t')}{c}\right) \times \frac{\dot{\vec{v}}(t')}{c}\right)\right\}^2}{\left(1 - \vec{n}(\vec{r},t') \cdot \frac{\vec{v}(t')}{c}\right)^5} \cdot$$

$$\cdot \frac{r^2}{R^2(\vec{r},t')} \left[\vec{n}(\vec{r},t') \cdot \vec{n}\right] d\Omega$$

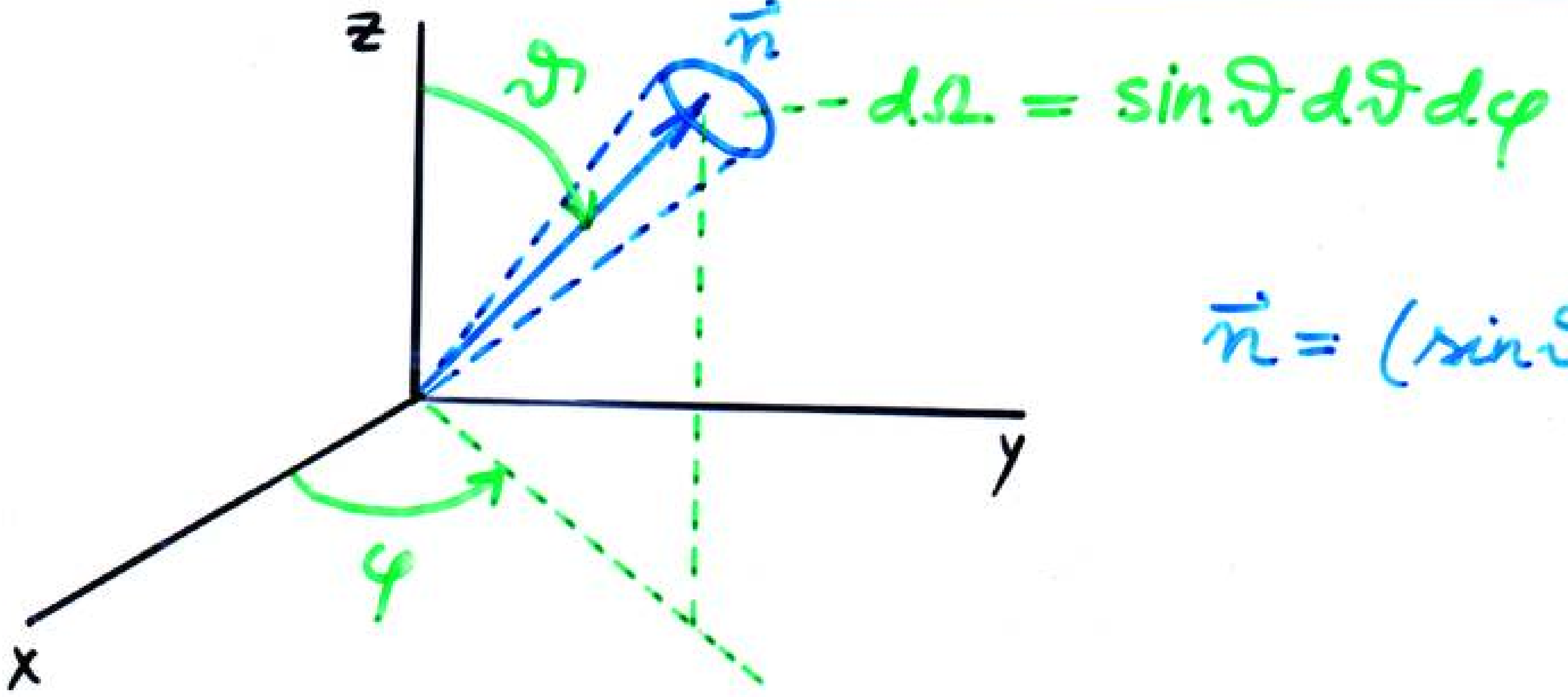
$$= \int_{T_1}^{T_2} \underbrace{dt' \, \frac{q^2}{4\pi c} \, \frac{\left\{\vec{n} \times \left(\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}(t')}{c}\right) \times \frac{\dot{\vec{v}}(t')}{c}\right)\right\}^2}{\left(1 - \vec{n} \cdot \frac{\vec{v}(t')}{c}\right)^5} \, d\Omega}_{d^2 U_{rad}(t', \Omega)}$$

, da T_1, T_2 beliebig

$\Omega \leftrightarrow \vec{n}$

Somit: gesamte von der Ladung zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit in die Raumwinkeleinheit um die Richtung
$\vec{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) \,\hat{=}\, \Omega \equiv (\vartheta, \varphi)$
abgestrahlte Energie:

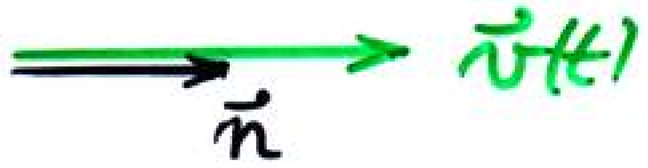
$$\frac{d^2 U_{rad}(t,\Omega)}{dt\, d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \, \frac{\left\{\vec{n} \times \left(\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}(t)}{c}\right) \times \frac{\dot{\vec{v}}(t)}{c}\right)\right\}^2}{\left(1 - \vec{n} \cdot \frac{\vec{v}(t)}{c}\right)^5}$$



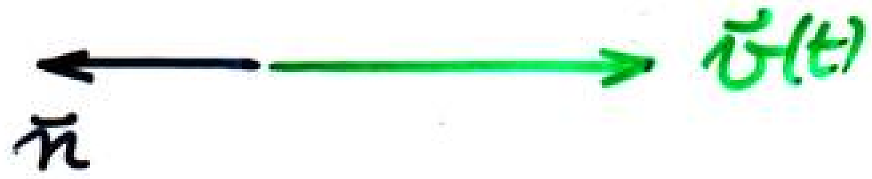
$\vec{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$

S6'

$\frac{v(t)}{c} = 0{,}99999999$ (Cornell: $\frac{v_{max}}{c} = 0{,}99999999987$)



$$\frac{1}{\left(1 - \vec{n} \cdot \frac{\vec{v}(t)}{c}\right)^5} = 10^{40}$$



$$\frac{1}{\left(1 - \vec{n} \cdot \frac{\vec{v}(t)}{c}\right)^5} \approx 3 \cdot 10^{-2}$$

Faktor $\sim 10^{41}$!

insgesamt von der Ladung zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit in alle Richtungen abgestrahlte Energie:

$$\frac{dU_{rad}(t)}{dt} = \int_{[4\pi]} d\Omega \, \frac{d^2 U_{rad}(t,\Omega)}{dt\, d\Omega} = \dots$$

$$= \frac{2q^2}{3c} \, \frac{\frac{\dot{\vec{v}}^2(t)}{c^2} - \left(\frac{\vec{v}(t)}{c} \times \frac{\dot{\vec{v}}(t)}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)^3} \quad \propto \frac{1}{c^3} \quad *)$$

Selbstkraft $\vec{K}^{(rad)}(t)$ der Ladung ("Strahlungs=dämpfungskraft"): $\vec{K}^{(rad)}(t) \equiv \vec{K}^{(rad)}(\cancel{\vec{r}(t)}, \vec{v}(t), \dot{\vec{v}}(t), \ddot{\vec{v}}(t), \cancel{\dots})$

am Teilchen in der Zeiteinheit von $\vec{K}^{(rad)}(t)$ zum Zeitpunkt t geleistete Arbeit:

$$\frac{dA_{rad}(t)}{dt} = \vec{K}^{(rad)}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

$$-\frac{dU_{rad}(t)}{dt} \neq \frac{dA_{rad}(t)}{dt}$$

*)

$$\Delta\tau = \frac{2q^2}{3mc^3} \quad !$$

$$\Delta\tau_e \approx 6 \cdot 10^{-24}\,\text{sec}$$

lediglich

$$-\overline{\frac{dU_{rad}(t)}{dt}} = \overline{\frac{dA_{rad}(t)}{dt}} \quad \text{(Zeitmittel)}$$

"später": 12

Energieerhaltung nur für Gesamtsystem Teilchen + Feld [inkl. verallg. Coulombfeld + Kreuztermen]

$$\frac{v(t)}{c} = 0{,}99999999$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)^3} \approx 10^{23}$$ gegenüber ≈ 1 für $\frac{v(t)}{c} \ll 1$.

Faktor 10^{23} !

Näherungen für $|\vec{v}(t)| \ll c$: 7

$$\frac{d^2 U_{rad}(t,\Omega)}{dt\, d\Omega} \approx \frac{q^2 \dot{\vec{v}}^2(t)}{4\pi c^3} \sin^2\Theta(t)$$

$$\Theta(t) \sphericalangle \; \vec{n}, \dot{\vec{v}}(t)$$

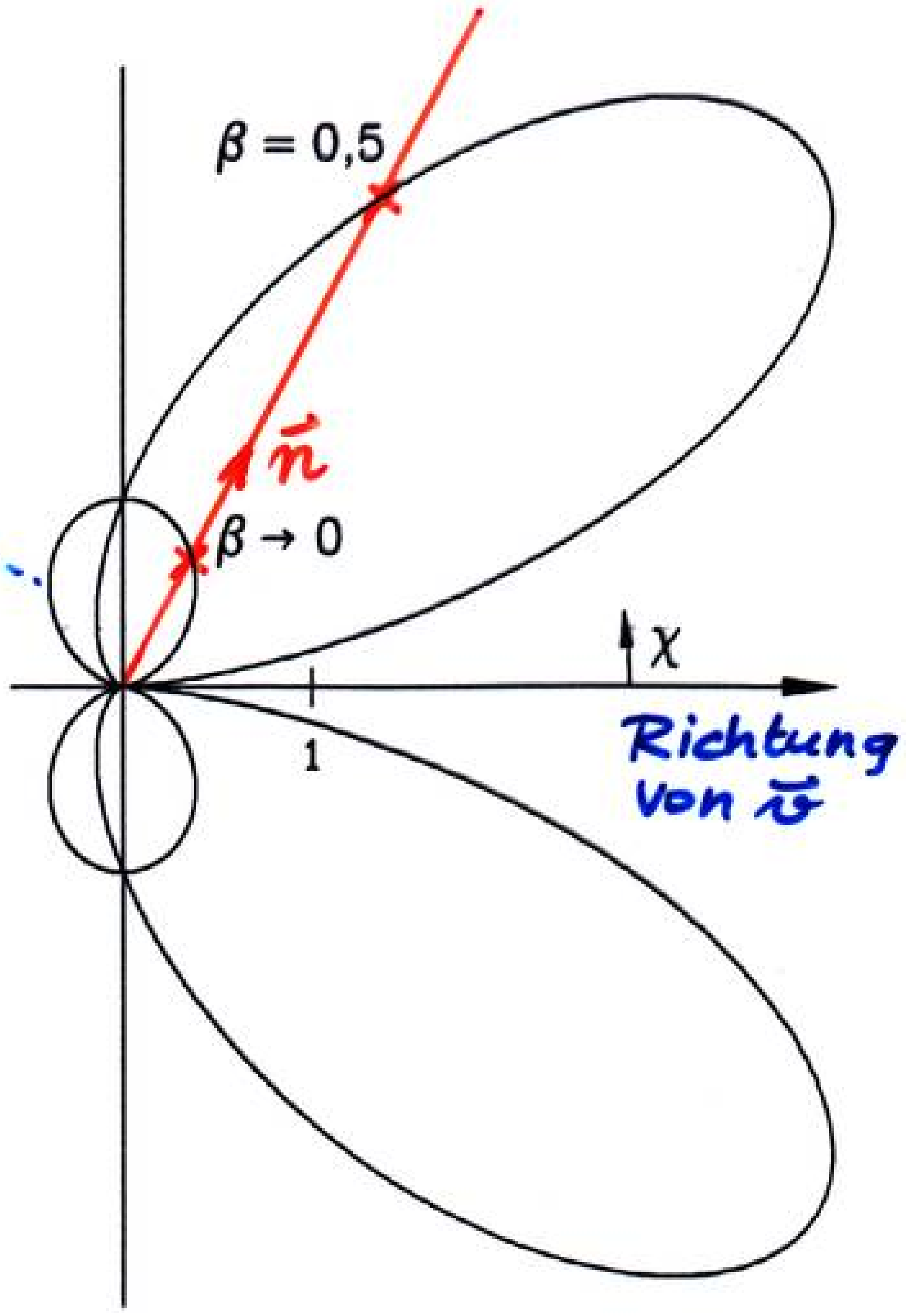
$$\frac{dU_{rad}(t)}{dt} \approx \frac{2q^2 \dot{\vec{v}}^2(t)}{3c^3}$$

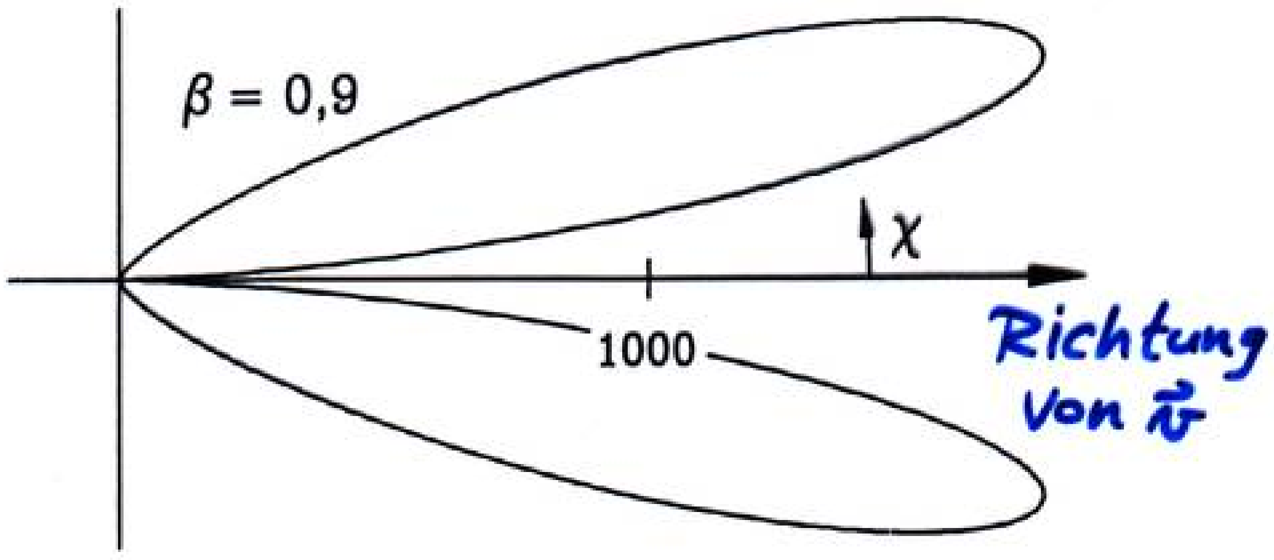
"Larmorsches Gesetz"

Polardiagramme: $\dfrac{d^2U_{rad}}{dt\,d\Omega}$ in

Einheiten $\dfrac{q^2\,\dot{\vec{v}}^2}{4\pi c^3}$ für festes t

$\sin^2\Theta$
$= \sin^2\chi$



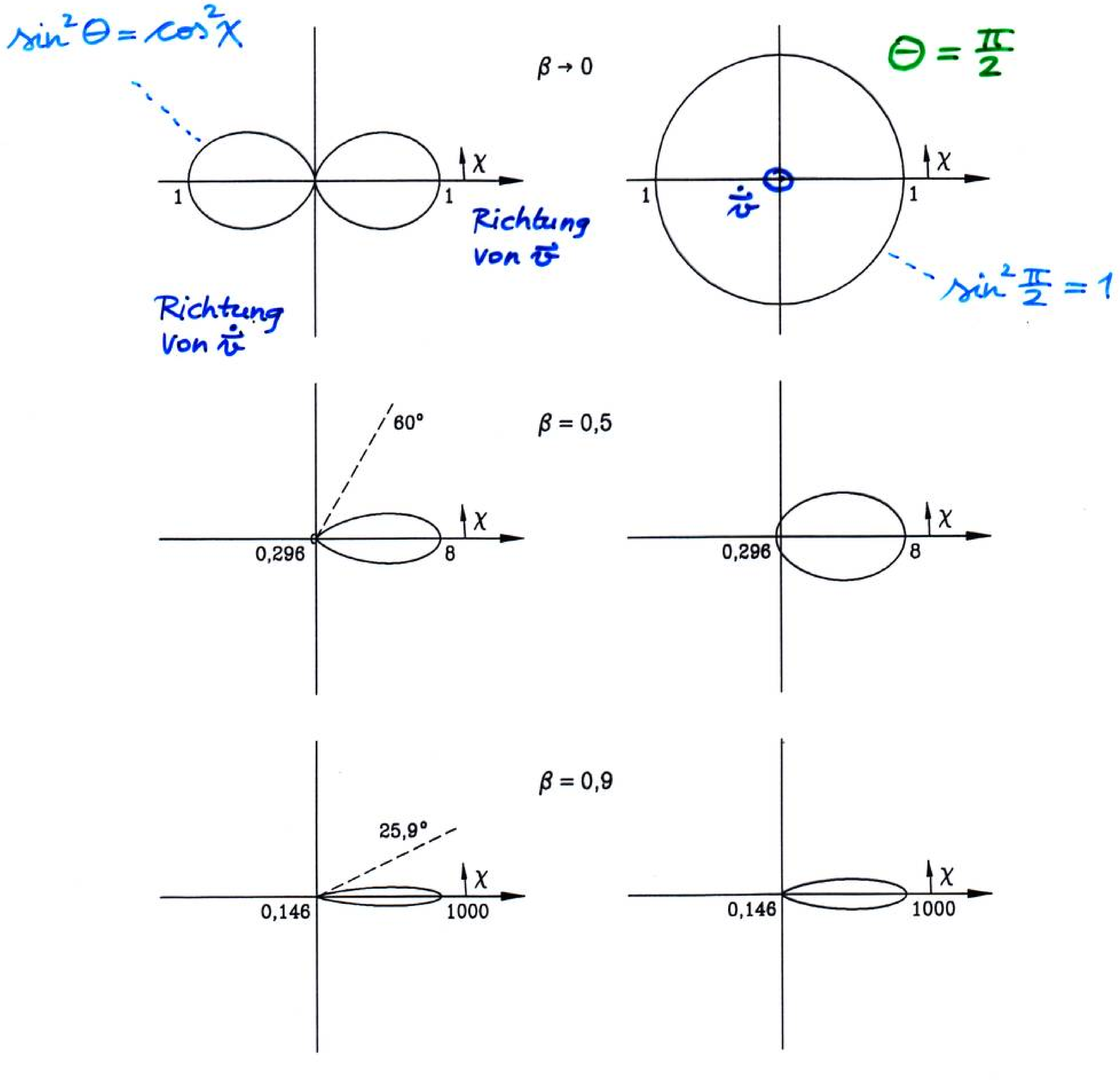


Rotationssymmetrie bzgl. Achse $\longrightarrow$

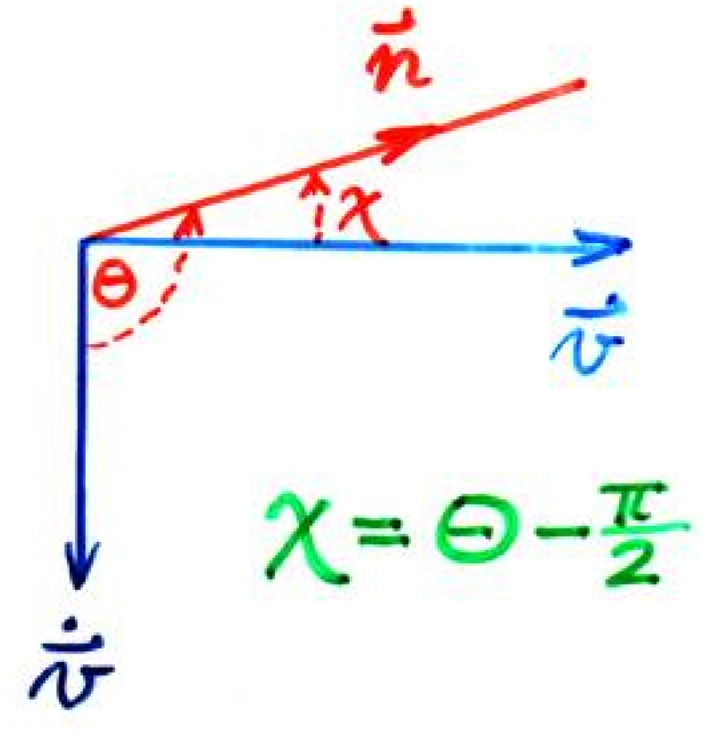
d.h. $\chi = \Theta$

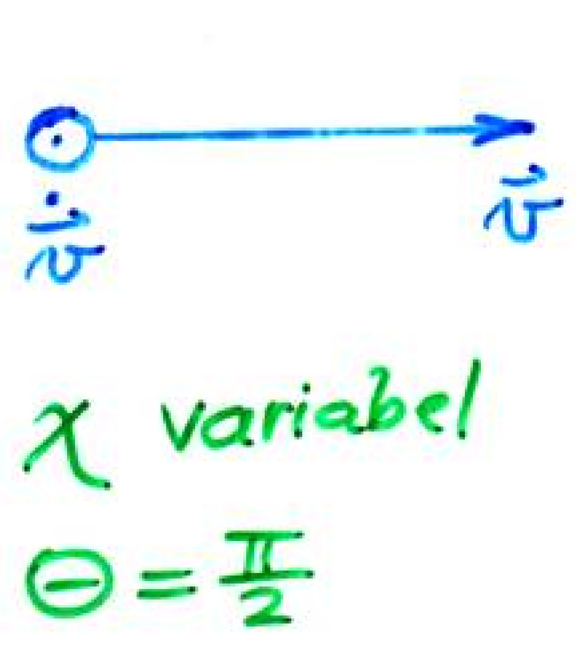
t fest

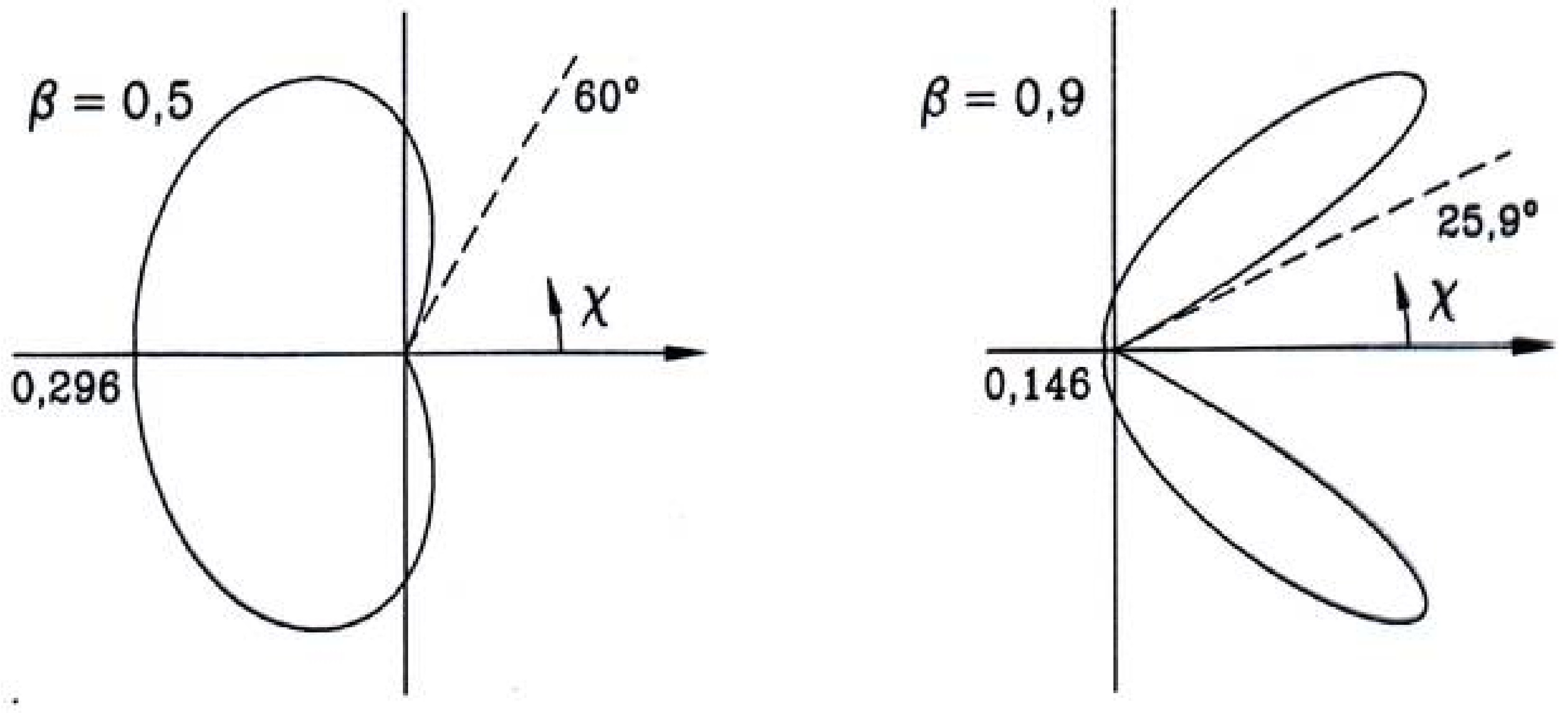
keine Rotationssymmetrie bzgl. Achse $\longrightarrow$

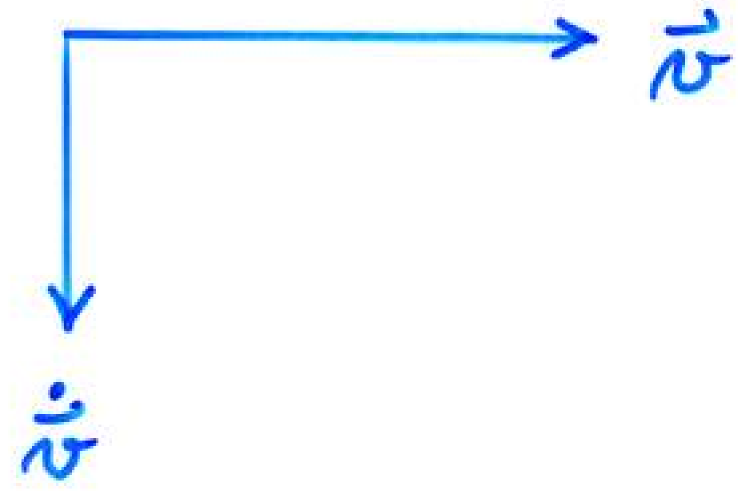


(a) (b)






$\beta = 0,5$
60°
χ
0,296
$\beta = 0,9$
25,9°
χ
0,146


$\vec{v}$
$\dot{\vec{v}}$