AUSBREITUNG ELM. WELLEN IM VAKUUM

"Freie" elm. Felder = elm. Wellenfelder

Homogene Mx-Gln.:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r},t) = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

beliebige Zeit- (und orts-) abhängige Lsgn. dieser Gln. heißen elm. Wellen

"Verursacher"? "Autonom"

Superpositionsprinzip!

2.GA: $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ für $t>t_0$ zu bestimmen bei gegebener AB

$$\vec{E}(\vec{r},t_0) = \vec{E}_a(\vec{r}) \quad , \quad \vec{B}(\vec{r},t_0) = \vec{B}_a(\vec{r})$$

$$(\operatorname{div} \vec{E}_a(\vec{r}) = 0, \ \operatorname{div} \vec{B}_a(\vec{r}) = 0)$$

Notwendige Bdgn für Erfüllung der homogenen Mx-Gln.: Aufg. 8

Homogene Wellengln.:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{B}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

~~POTENTIALE~~

Beachte: $\Delta := \operatorname{rot}\operatorname{rot} - \operatorname{grad}\operatorname{div}$, aber als "gewöhnl." Laplace interpretierbar für x-, y-, z-Komp.

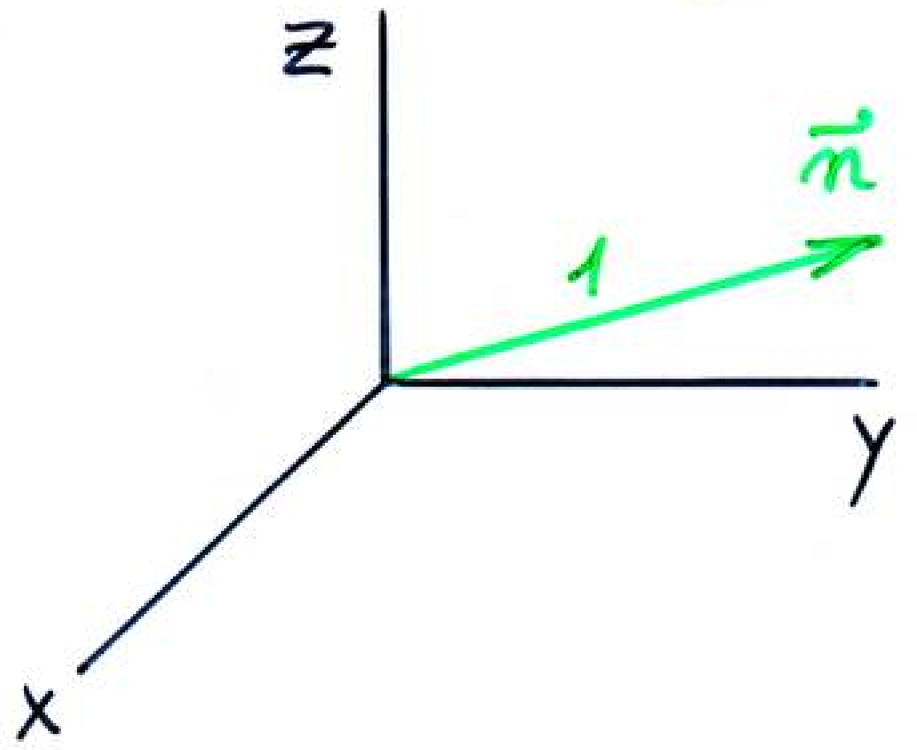
Spezielle Partikulärlösungen:[+)]

Fortschreitende ebene Wellen

Mathematischer Hilfssatz zur homogenen Wellengleichung:

Ist

1) $\vec{n}$ ein beliebig vorgegebener (reeller) Einheitsvektor



und

2) f eine beliebige zweimal stetig differenzierbare nicht konstante reellwertige Funktion einer reellen Variablen τ.

Dimension!

so ist

$$u(\vec{r},t) = f\left(\vec{n}\cdot\frac{\vec{r}}{c} - t\right)$$

Partikulärlösung von

$$\Delta u(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 .$$

+) Mx-Gln. linear $\longrightarrow$ lineare SUPERPOSITION von Partikulärlsgn. möglich

Beweis: $u(\vec r,t) = f\left(\vec n\cdot\frac{\vec r}{c}-t\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{n_x}{c} f' \;, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{c} f'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{n_x^2}{c^2} f'' \;, \quad \Delta u = \frac{n_x^2+n_y^2+n_z^2}{c^2} f''$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u = \frac{1}{c^2} f'' \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} f'' \end{array}\right\} =$$

Somit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec E(\vec r,t) = \vec f\left(\vec n\cdot\frac{\vec r}{c}-t\right) \\ \vec B(\vec r,t) = \vec g\left(\vec n\cdot\frac{\vec r}{c}-t\right) \end{array}} \qquad (*)$$

$\vec f = (f_x, f_y, f_z)$, $\vec g = (g_x, g_y, g_z)$ — 6 beliebige nicht konstante zweimal stetig diffb. reellw. Fktn. einer reellen Variablen τ

stellen zeit- und ortsabhängige Partikulärlsgn. der homogenen Wellengln. für $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ dar.

Frage: Ist es möglich, daß (*) auch die homogenen Mx-Gln. löst, wofern nur geeignete Nebenbedingungen für die 6 Funktionen $f_x, f_y, f_z, g_x, g_y, g_z$ erfüllt sind?

Also:

$$\left.\begin{aligned}\vec E(\vec r,t) &= \vec f\left(\vec n\cdot\frac{\vec r}{c}-t\right)\\ \vec B(\vec r,t) &= \vec g\left(\vec n\cdot\frac{\vec r}{c}-t\right)\end{aligned}\right\}$$

als Lösungsansatz für die homogenen Mx-Gln. verwendet

$$\underbrace{\operatorname{div}\vec E}_{\vec\nabla\cdot\vec E=\vec\nabla\cdot\vec f} = \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{\frac{n_x}{c}f_x'} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{\frac{n_y}{c}f_y'} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{\frac{n_z}{c}f_z'} = \frac{\vec n}{c}\cdot\vec f' = 0 \quad \forall \vec r,t$$

$$\Rightarrow \quad \vec n\cdot\vec f' = 0 \quad \forall\tau \quad {}^{+)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec\nabla\cdot\vec f &= \frac{\vec n}{c}\cdot\vec f'\\ \vec\nabla\times\vec f &= \frac{\vec n}{c}\times\vec f'\end{aligned}}$$

analog mit $\vec g$

Analog:

$$\operatorname{div}\vec B = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec n\cdot\vec g' = 0 \quad \forall\tau \quad {}^{+)}$$

$$\operatorname{rot}\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \frac{\vec n}{\cancel{c}}\times\vec f' = \cancel{\tfrac{1}{c}}\,\vec g' \quad \forall\tau \quad {}^{+)}$$

$$\operatorname{rot}\vec B = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec E}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \vec n\times\vec g' = -\vec f' \quad \forall\tau \quad {}^{+)}$$

+) $\vec f', \vec g'$ als Fktn. von τ, $\forall\tau$

($\vec f', \vec g'$ von $\vec 0$ verschieden)

$\Rightarrow$ (Integr. nach τ)

$$\boxed{\begin{aligned}\vec n\cdot\vec f &= 0\\ \vec n\times\vec f &= \vec g\end{aligned}}$$

$$\vec n\cdot\vec g = 0$$
$$\vec n\times\vec g = -\vec f$$

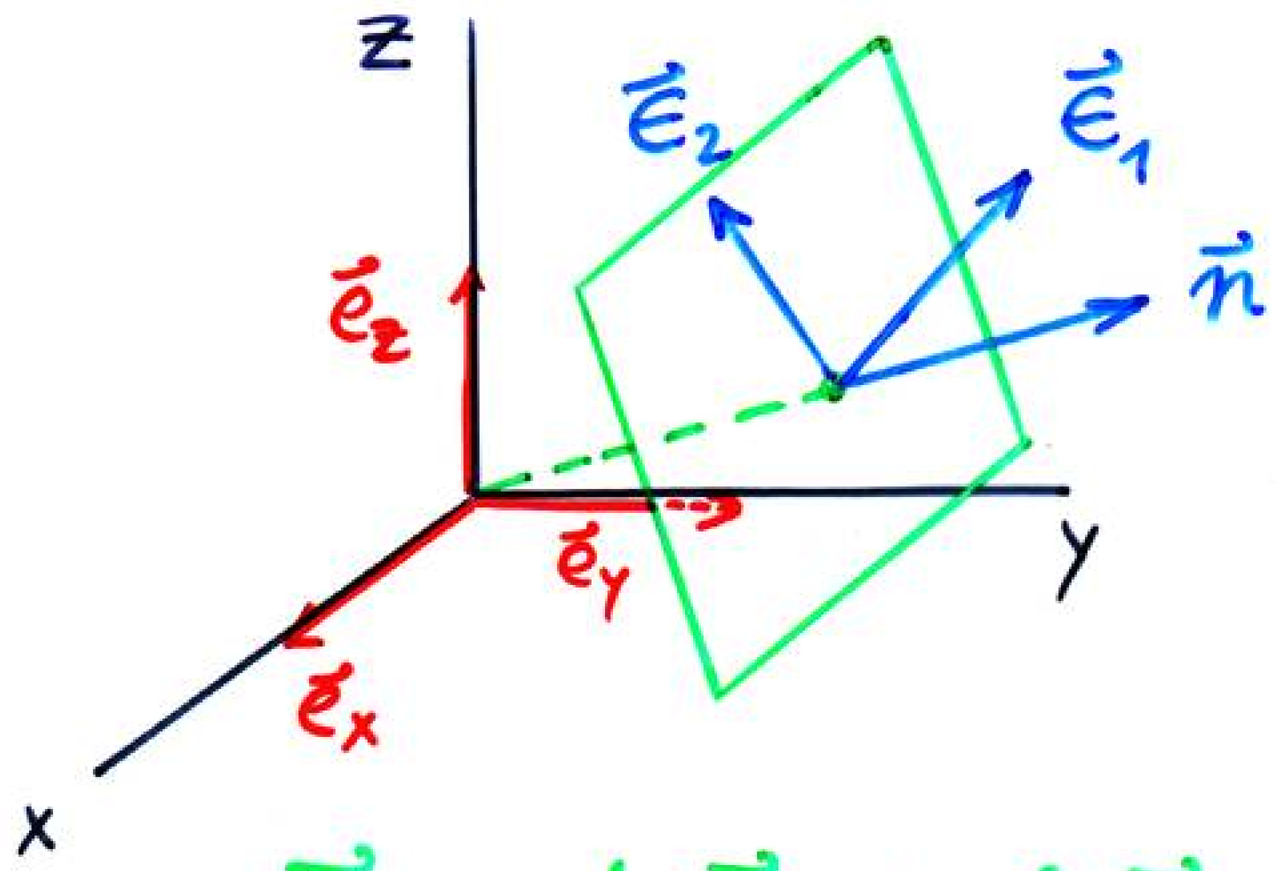
redundant mit den anderen Bdgn.

Bdgn. für $\vec f, \vec g$, $\forall\tau$

$\Downarrow$

nur mehr 2 Fktn. (etwa f_x, f_y) willkürlich wählbar, die restlichen (f_z, g_x, g_y, g_z) dann festgelegt

Polarisationsvektoren $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$



$\vec{n}, \vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$ orthonorm. Dreibein (Rechtssystem)

$\vec{f} = f_1 \vec{\epsilon}_1 + f_2 \vec{\epsilon}_2$ erfüllt dann "automatisch" $\vec{n} \cdot \vec{f} = 0$

Zusammenfassung:

Die homogenen Mx-Gln. besitzen Partikulärlsgn. der Form

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \sum_{\alpha=1,2} f_\alpha\left(\vec{n}\cdot\frac{\vec{r}}{c} - t\right) \vec{\epsilon}_\alpha \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r},t) \end{aligned}}$$

wobei f_1, f_2 beliebige zweimal stetig diffb. (nicht konstante) reellwertige Fktn. einer reellen Variablen (τ) sind. ($\neq 0$)

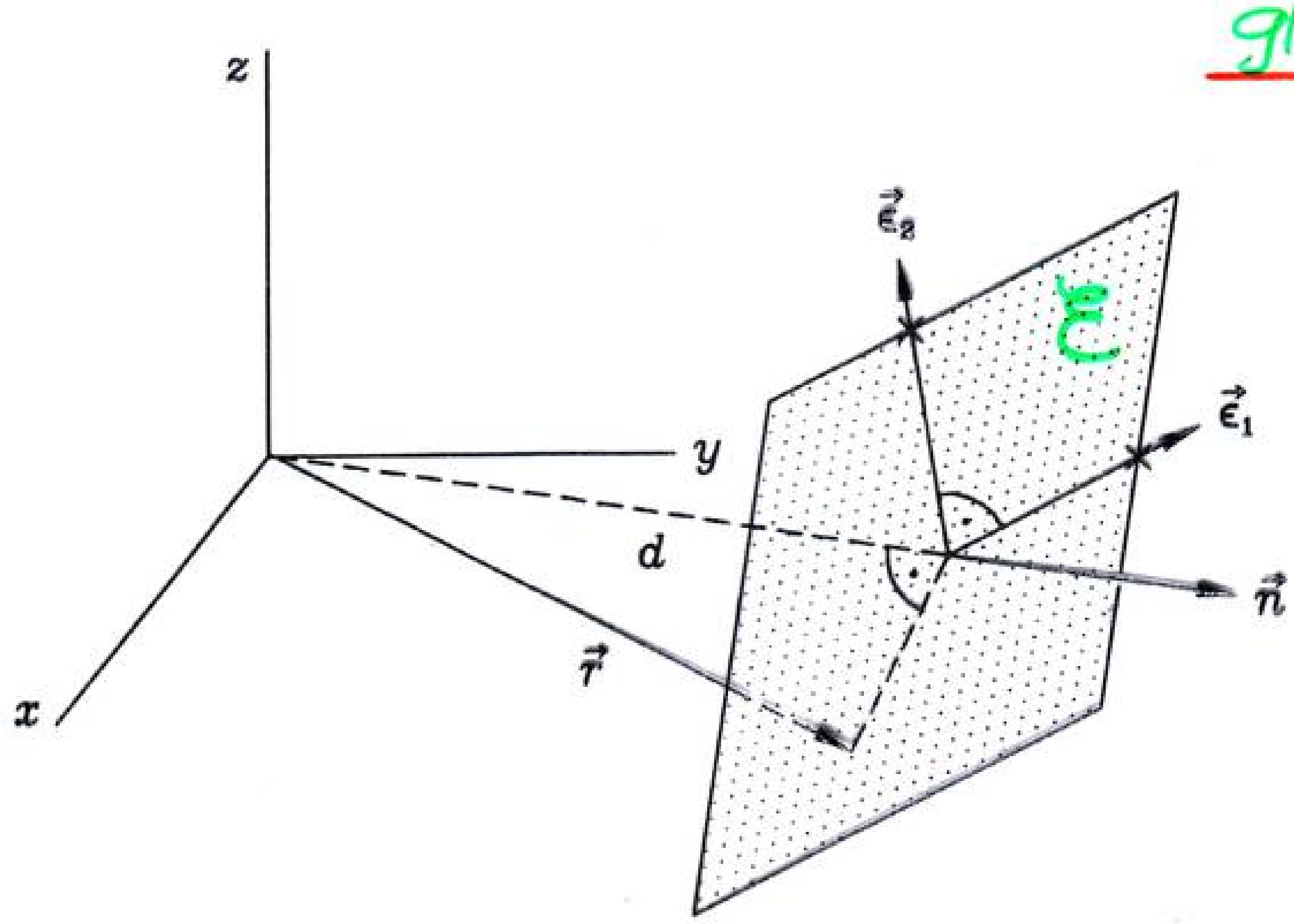
Diese Partikulärlsgn. beschreiben in Richtung $\vec{n}$ mit der Geschwindigkeit c fortschreitende (i.a. aperiodische) ebene Wellen.

Gründe für diese Bezeichnung:

1) t fest, $\vec{n}\cdot\vec{r} = d$ fest $\Rightarrow$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} f_\alpha\left(\frac{d}{c} - t\right)\vec{\varepsilon}_\alpha$$

für alle Punkte $\vec{r}$ in der Ebene $\mathcal{E}$ gleich



$\Rightarrow$ $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r},t)$ für alle Punkte $\vec{r}$ in der Ebene $\mathcal{E}$ gleich

2) $\left.\begin{array}{l} t \longrightarrow t + \delta t \\ d \longrightarrow d + c\,\delta t \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{d + c\,\delta t}{c} - (t + \delta t)$

$$= \frac{d}{c} - t$$

$\Rightarrow$ jene Werte von $\vec{E}, \vec{B}$, die zum Zeitpunkt t in der Ebene mit Abstand d vom Ursprung vorlagen, liegen zum Zeitpunkt $t + \delta t$, also δt später in einer in Richtung $\vec{n}$ um $c\,\delta t$ verschobenen Ebene $\perp \vec{n}$ vor.

"Modell"

Weitere
wichtige Eigenschaften von

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} f_\alpha\left(\vec{n}\cdot\frac{\vec{r}}{c} - t\right)\vec{\varepsilon}_\alpha$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{n}\times\vec{E}(\vec{r},t)$$

1) $\vec{n}, \vec{E}, \vec{B}$ orthogonales Dreibein (Rechtssystem)
$|\vec{E}| = |\vec{B}|$

"TEM-Welle"

Beachte: $\vec{E} \perp \vec{B}$, $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ sind L-invariante Eigenschaften!

2) $$u_{el} = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2 = \frac{1}{8\pi}\vec{B}^2 = u_m$$ ($\vec{r}, t$ weggelassen)

$$\Rightarrow \quad u_{elm} = \frac{1}{4\pi}\vec{E}^2$$

Ferner:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{c}{4\pi}\vec{E}^2\vec{n} = u_{elm}\,c\,\vec{n}$$

$$\vec{\mathcal{P}}_{elm} = \frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{u_{elm}}{c}\vec{n}$$

Beachte: Photon: $|\vec{p}| = \frac{E}{c} \longleftrightarrow |\vec{\mathcal{P}}_{elm}| = \frac{u_{elm}}{c}$

3) Welle periodisch, falls $f_1(\tau), f_2(\tau)$ periodische Funktionen mit gleicher Periode T ($f_\alpha(\tau + T) = f_\alpha(\tau)$), sonst aperiodisch.

Spezielle periodische fortschreitende ebene Wellen:

monochromatische (harmonische) ebene Wellen

$$f_\alpha(\tau) = E_{0\alpha} \cos(\underbrace{\omega\tau}_{\text{dimensionslos!}} + \delta_\alpha) \quad , \quad \alpha = 1,2$$

ω vorgegeben

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} E_{0\alpha} \vec{\epsilon}_\alpha \cos\left[\omega\left(\vec{n}\cdot\frac{\vec{r}}{c} - t\right) + \delta_\alpha\right]$$

ω Kreisfrequenz

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ Frequenz

$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ (zeitliche) Periode

$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$ Wellenlänge (räumliche Periode)

$k = k(\omega) = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ Kreiswellenzahl

$\omega = \omega(k) = ck$ Dispersionsbeziehung (hier: lineare Beziehung)

$v_{Ph} = \frac{\omega(k)}{k} = c$ Phasengeschwindigkeit

$\vec{k} = \vec{k}(\omega) = k(\omega)\vec{n} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$ Kreiswellenzahlvektor

$\Rightarrow$

"Phase": $\omega\left(\vec{n}\cdot\frac{\vec{r}}{c} - t\right) = \frac{\omega}{c}(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct)$

$$= \vec{k}(\omega)\cdot\vec{r} - \omega t$$

$$= \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k) t$$

Monochromatische ebene Welle: Kreisfrequenz ω

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} E_{0\alpha}\,\vec{\epsilon}_\alpha \cos\left[\frac{\omega}{c}(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct) + \delta_\alpha\right]$$

$$= \sum_{\alpha=1,2} E_{0\alpha}\,\vec{\epsilon}_\alpha \cos\left[\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_\alpha\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r},t)$$

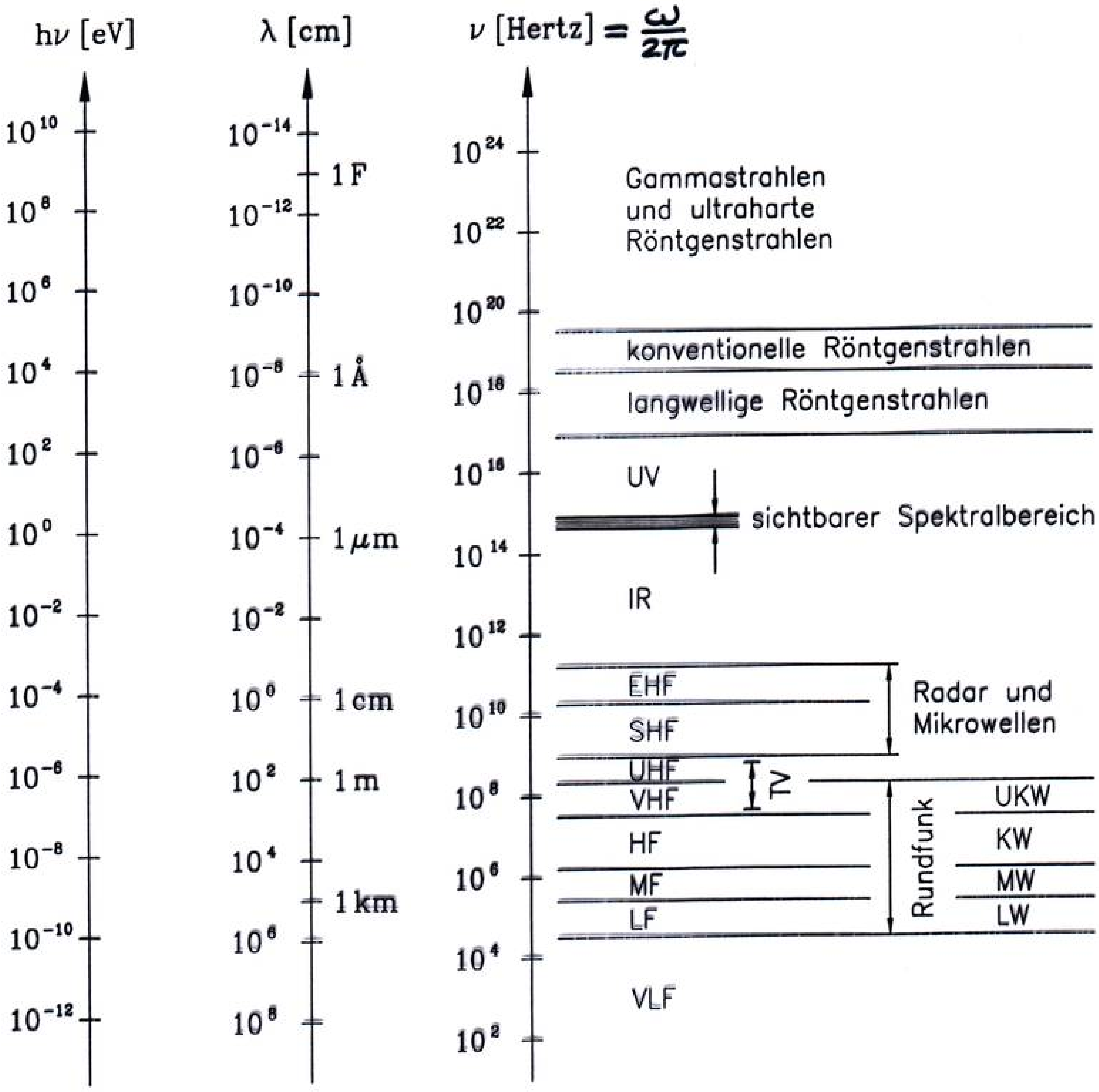
Fouriersches Theorem

1) Jede nichtmonochromatische periodische ebene Welle läßt sich als Überlagerung von diskreten monochromatischen ebenen Wellen (gleicher Ausbreitungsrichtung) schreiben: Fourierreihe

2) Jede aperiodische ebene Welle läßt sich als kontinuierliche Überlagerung monochromatischer ebener Wellen (gleicher Ausbreitungsrichtung) schreiben: Fourierintegral

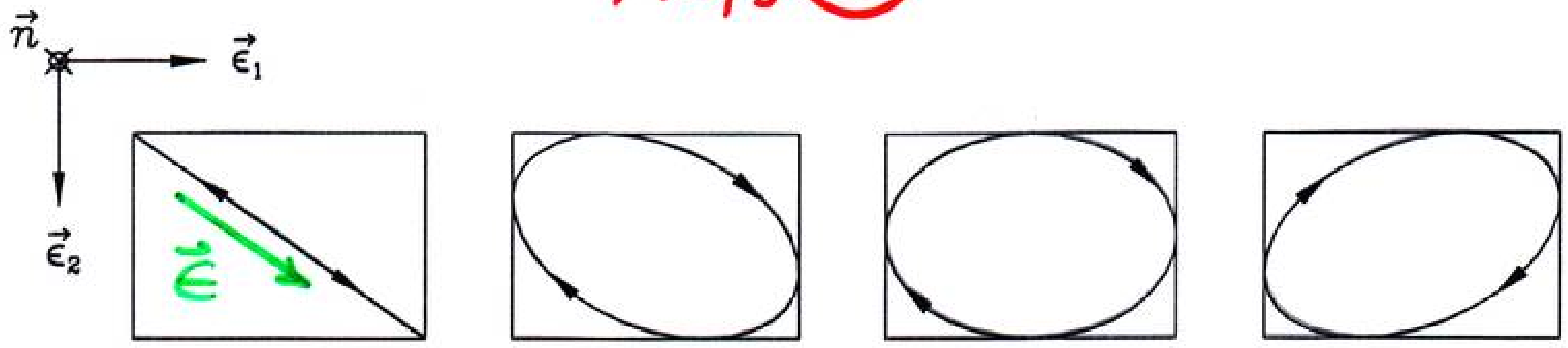
Theoretisches Kreisfrequenzspektrum $0 < \omega < +\infty$.

logarithmische Skalen!



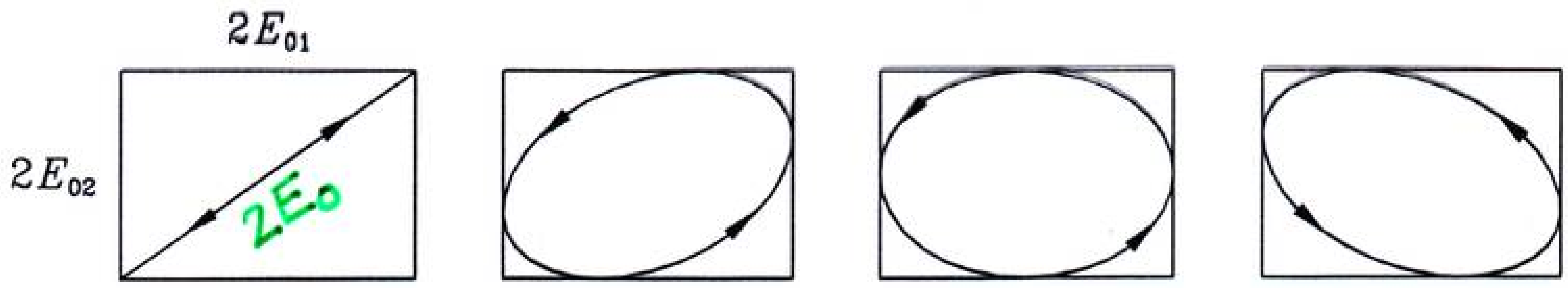
Polarisationszustand einer monochromatischen ebenen Welle

Aufg. 9



$\chi = 0$ | $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$ | $\chi = \frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$

linear | rechtselliptisch polarisiert



$\chi = \pi$ | $\pi < \chi < \frac{3\pi}{2}$ | $\chi = \frac{3\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi$

linear | linkselliptisch polarisiert

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} E_{0\alpha}\,\vec{\epsilon}_\alpha \cos\left[\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_\alpha\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \chi := \delta_2 - \delta_1 \in [0, 2\pi) \\[1em] \dfrac{E_{01}}{E_{02}} \in [0, +\infty) \end{array}\right\} \text{ bestimmen den Polarisations= zustand}$$

Sonderfälle!

z.B. $\chi = 0$, d.h. $\delta_1 = \delta_2 \equiv \delta$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \underbrace{\left(\sum_{\alpha=1,2} E_{0\alpha}\,\vec{\epsilon}_\alpha\right)}_{E_0 \vec{\epsilon}} \cos\left[\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r} - \omega t + \delta\right]$$

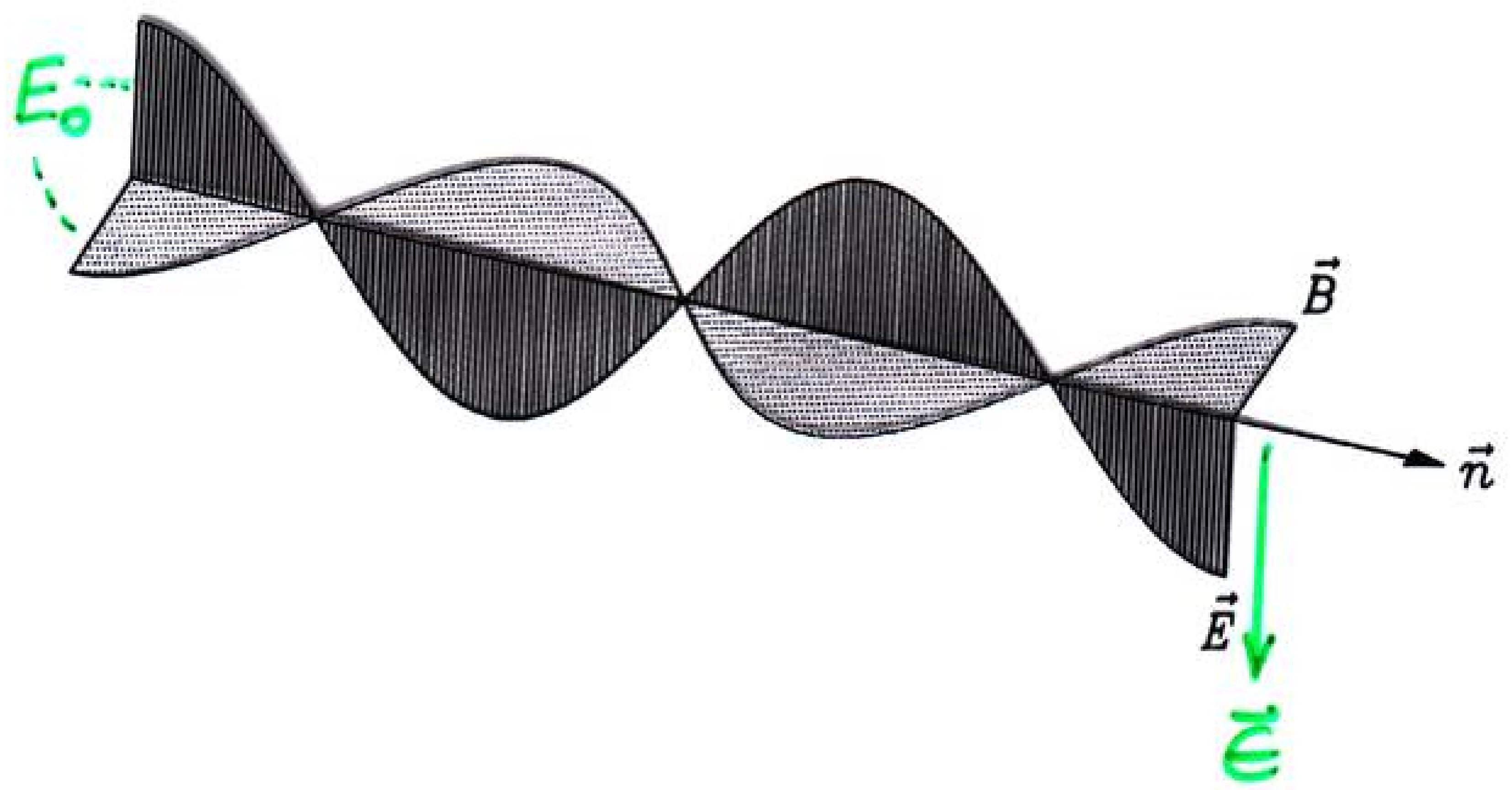
$E_0\,\vec{\epsilon}$ mit $E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2}$

$$\vec{\epsilon} = \frac{E_{01}\vec{\epsilon}_1 + E_{02}\vec{\epsilon}_2}{\sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2}}$$

maximale Amplitude

Schwingungsrichtung (Polarisationsrichtung)

"Momentaufnahme" (t fest) einer linear polarisierten monochromatischen ebenen Welle



Intensität einer monochromatischen ebenen Welle

Allgemein für monochromatische Welle (kann z.B. auch Kugelwelle sein):

$$\boxed{I(\vec{r}) := |\overline{\vec{S}(\vec{r},t)}|} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{mit} \quad \overline{\vec{S}(\vec{r},t)} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \vec{S}(\vec{r},t)\,dt$$

Speziell: monochromatische ebene Welle Aufg. 10

$$\overline{\vec{S}(\vec{r},t)} = \frac{c}{4\pi}\,\overline{\vec{E}^2(\vec{r},t)}\,\vec{n} = \frac{c}{8\pi}\left(E_{01}^2 + E_{02}^2\right)\vec{n}$$

$$I = \frac{c}{8\pi}\left(E_{01}^2 + E_{02}^2\right) \quad \text{ortsunabhängig}$$

klassische Elektrodynamik gibt:

Ohne Beweis: $\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t$ Viererskalarfeld$^{+)}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{(k^\mu) = (k^0, \vec{k}) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) = \frac{\omega}{c}(1, \vec{n})}$$

$$\underline{k}\cdot\underline{k} = \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0$$

Vierervektor = Viererkreiswellenzahlvektor (lichtartig)

$$k^{\mu'} = L^{\mu'}{}_{\alpha}\, k^\alpha \Longrightarrow$$ Aberration und Dopplereffekt

QT: Photon $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ Einstein-de Broglie-Bez.

$$(p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k}\right) = \hbar\,(k^\mu)$$

"klass." Lichtteilchen | mit $E = c|\vec{p}|$ $\Rightarrow$ $\underline{p}\cdot\underline{p} = |\vec{p}|^2 - \vec{p}^2 = 0$

+) $(x^\mu) = (ct, \vec{r})$

$(k^\mu) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$

$\Rightarrow \underline{k}\cdot\underline{x} = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}$

also: $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = -\underline{k}\cdot\underline{x}$

Quotiententheorem:

$\underline{k}\cdot\underline{x}$ = Viererskalarfeld, $\forall \underline{x}$

$\Downarrow$

$\underline{k}$ tatsächlich Vierervektor

Nichtmonochromatische periodische fortschreitende ebene Wellen

$\omega^{(\ell)} = \ell \cdot \omega_0$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} \vec{\epsilon}_\alpha \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} E_{0\alpha}^{(\ell)} \cos\left[\frac{\ell\omega_0}{c}(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)+\delta_\alpha^{(\ell)}\right]}_{f_\alpha\left(\vec{n}\cdot\frac{\vec{r}}{c}-t\right)\ \text{Fourier=reihe (Periode } T)}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r},t)$$

"nichtzerfließendes" Signal

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $\lambda = cT$ (ω_0 Grundfrequenz)

Fourierreihe ohne konst. Term!

Aperiodische fortschreitende ebene Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} \vec{\epsilon}_\alpha \underbrace{\int_0^{+\infty} d\omega\, E_{0\alpha}(\omega) \cos\left[\frac{\omega}{c}(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)+\delta_\alpha(\omega)\right]}_{f_\alpha\left(\vec{n}\cdot\frac{\vec{r}}{c}-t\right)\ \text{Fourier=integral}}$$

$\vec{E}_{0\alpha}(\omega)$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r},t)$$

"nichtzerfließendes" Signal Informationsübermittlung

Realistische elm. Wellen: Energie!

Wellenpakete: Überlagerungen ebener elm. Wellen mit verschiedenen Frequenzen $\omega = ck$ und verschiedenen Ausbreitungsrichtungen $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$

$E_{0\alpha}(\vec{k})\vec{\epsilon}(\vec{k})$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, \vec{E}_{0\alpha}(\vec{k}) \cos\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t + \delta_\alpha(\vec{k})\right]$$

ck

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \left(\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}_{0\alpha}(\vec{k})\right) \cos\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t + \delta_\alpha(\vec{k})\right]$$

$\vec{k}, \vec{E}_{01}(\vec{k}), \vec{E}_{02}(\vec{k})$ orth. DB

"zerfließendes" Signal

1) $f_\alpha(\tau + T) = f_\alpha(\tau) \quad , \; \alpha = 1,2$

T (kleinste) zeitliche Periode

$\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ Grundfrequenz

$$f_\alpha(\tau) = \sum_{\ell=1}^{\infty} E_{0\alpha}^{(\ell)} \cos(\overbrace{\ell \cdot \omega_0}^{\omega^{(\ell)}} \tau + \delta_\alpha^{(\ell)}) \quad , \; \alpha = 1,2$$

Fourierreihe

2) $$E_{0\alpha}(\omega) = \sum_{\ell=1}^{\infty} E_{0\alpha}^{(\ell)} \, \delta(\omega - \omega^{(\ell)})$$

$$f_\alpha(\tau) = \int_0^{+\infty} d\omega \, E_{0\alpha}(\omega) \cos(\omega\tau + \delta_\alpha(\omega))$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} E_{0\alpha}^{(\ell)} \cos(\omega^{(\ell)}\tau + \underbrace{\delta_\alpha(\omega^{(\ell)})}_{\equiv \delta_\alpha^{(\ell)}})$$

Ebene monochrom. Wellen mit allen Frequenzen und Ausbreitungsrichtungen: VOLLSTÄNDIGES SYSTEM VON ENTWICKLUNGSFKTN

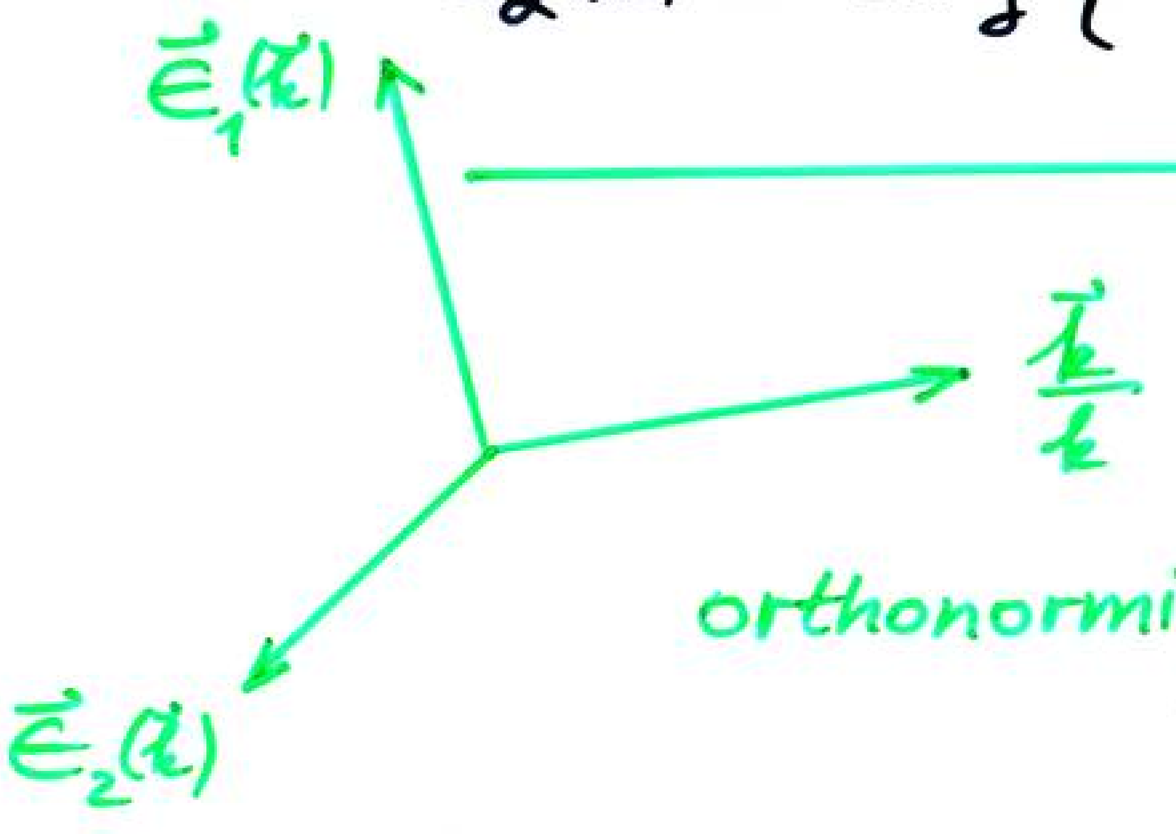
Lösung der 2. GA (ohne Beweis): $t_0 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, \vec{E}_{0\alpha}(\vec{k}) \cos\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t + \delta_\alpha(\vec{k})\right] \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \left(\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}_{0\alpha}(\vec{k})\right) \cos\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t + \delta_\alpha(\vec{k})\right]\end{aligned}}$$

mit $\omega(k) = ck$

$$\vec{E}_{0\alpha}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \left| \vec{\epsilon}_\alpha(\vec{k}) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[\vec{E}_a(\vec{r}) - \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{B}_a(\vec{r})\right] e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right| \vec{\epsilon}_\alpha(\vec{k})$$

$$\delta_\alpha(\vec{k}) = \arg\left\{ \vec{\epsilon}_\alpha(\vec{k}) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[\vec{E}_a(\vec{r}) - \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{B}_a(\vec{r})\right] e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\}$$



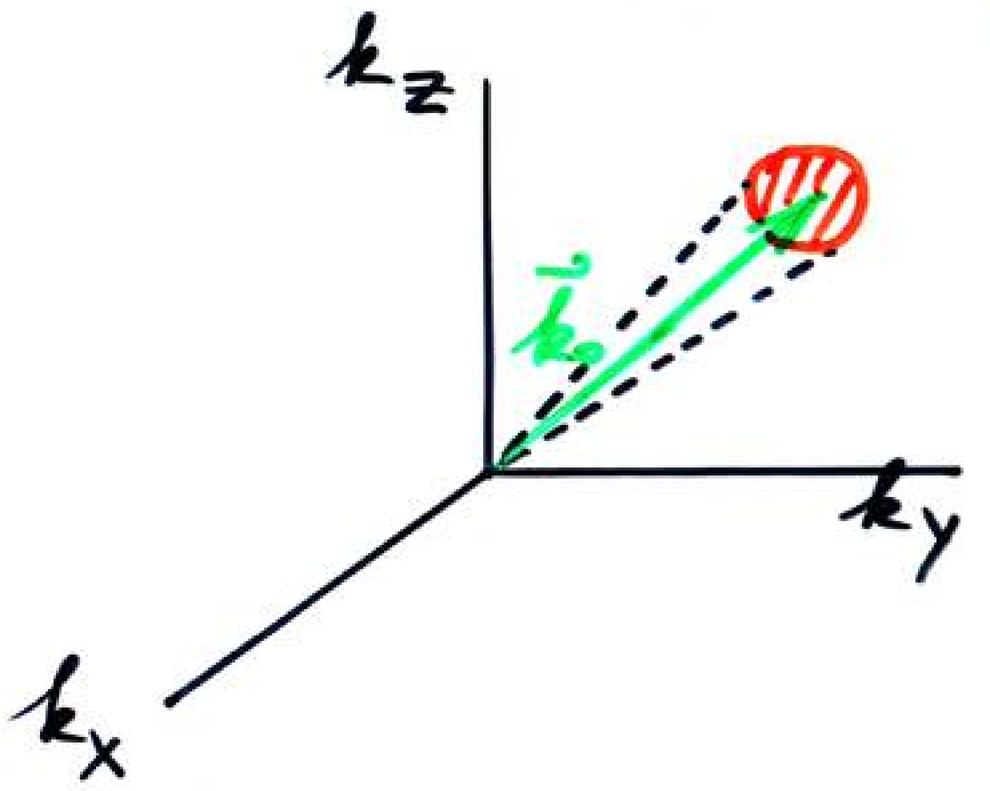
orthonormiertes Dreibein (Rechtssystem)

AB $\vec{E}_a(\vec{r}), \vec{B}_a(\vec{r})$ beliebig! *)

*) natürlich mit NB $\operatorname{div} \vec{E}_a(\vec{r}) = 0$, $\operatorname{div} \vec{B}_a(\vec{r}) = 0$

Wellenpaket im engeren Sinn

$\vec{E}_{01}(\vec{k})$, $\vec{E}_{02}(\vec{k})$ nur für $\vec{k}$–Vektoren "um ein $\vec{k}_0$ herum" (merklich) von null verschieden



langsam zerfließendes Signal, welches sich als "Ganzes" mit der Geschwindigkeit c in Richtung $\vec{n}_0 = \frac{\vec{k}_0}{k_0}$ ausbreitet

Gruppengeschwindigkeit*)

$$\vec{v}_{Gr} = \mathrm{grad}_{\vec{k}}\, \omega(k) \Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0} = c\,\frac{\vec{k}_0}{k_0} = c\,\vec{n}_0$$

Uhrensynchronisation in der SRT!

---

*) $\omega(k) = ck = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, $\frac{\partial}{\partial k_x}\omega(k) = c\,\frac{2k_x}{2\sqrt{\ldots}} = c\,\frac{k_x}{k}$ usf.

Komplexe Schreibweise

Monochromatische ebene Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} E_{0\alpha}\, \vec{\epsilon}_\alpha \cos\left[\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_\alpha\right]$$

$$i \sin\left[\qquad \right]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\vec{E}_c(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} E_{0\alpha}\, \vec{\epsilon}_\alpha\, e^{i\left[\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_\alpha\right]}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = 0$$

$$\vec{B}_c(\vec{r},t) = \vec{n} \times \vec{E}_c(\vec{r},t)$$

$$\vec{E}_c(\vec{r},t) = \vec{a}\, e^{i\left[\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r} - \omega t\right]}$$

$$\vec{B}_c(\vec{r},t) = \vec{n} \times \vec{E}_c(\vec{r},t)$$

$$\vec{a} = \sum_{\alpha=1,2} \underbrace{E_{0\alpha} e^{i\delta_\alpha}}_{a_\alpha} \vec{\epsilon}_\alpha$$

Linear polarisierte monochromatische ebene Welle

$$\vec{a} = E_0 e^{i\delta} \vec{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

Allgemeine ebene Welle

$$\vec{E}_c(\vec{r},t) = \int_0^{+\infty} d\omega\, \vec{a}(\omega)\, e^{i[\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r}-\omega t]}$$

$$\vec{B}_c(\vec{r},t) = \vec{n} \times \vec{E}_c(\vec{r},t)$$

$$\vec{a}(\omega) = \sum_{\alpha=1,2} \underbrace{E_{0\alpha}(\omega)\, e^{i\delta_\alpha(\omega)}}_{a_\alpha(\omega)} \vec{\epsilon}_\alpha$$

Wellenpaket

$$\vec{E}_c(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, \vec{a}(\vec{k})\, e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(k)t]}$$

$$\vec{B}_c(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \left(\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{a}(\vec{k})\right) e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t]}$$

$$\vec{a}(\vec{k}) = \sum_{\alpha=1,2} \underbrace{\vec{E}_{0\alpha}(\vec{k})\, e^{i\delta_\alpha(\vec{k})}}_{\vec{a}_\alpha(\vec{k})}$$

In allen Fällen: $\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\, \vec{E}_c(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Im}\, \vec{B}_c(\vec{r},t)$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{4\pi}(\mathrm{Re}\,\vec{E}_c \times \mathrm{Re}\,\vec{B}_c)$$

$$\neq \frac{c}{4\pi}\mathrm{Re}\,(\vec{E}_c \times \vec{B}_c) \quad !$$

LÖSEN DER HOMOGENEN MAXWELLGLEICHUNGEN UNTER VERWENDUNG DER KOMPLEXEN SCHREIBWEISE

(Ebene monochromatische Wellen gegebener Ausbreitungsrichtung $\vec{n}$): Aufgabe 11

Ansatz:

$$\vec{E}_c(\vec{r},t) = \vec{a}\, e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t]}$$

$$\vec{B}_c(\vec{r},t) = \vec{b}\, e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t]}$$

mit $\vec{k} = k\vec{n}$, $\vec{n}$ vorgegeben (reeller Einheits=vektor)

$k \leftrightarrow \omega$ noch unbestimmt!

Vorteil:

$$\vec{\nabla} \longrightarrow i\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{\omega}{c} = k(\omega)$$

$\omega = \omega(k) = ck$

Dispersionsbeziehung

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = 0$$

$$\vec{b} = \vec{n} \times \vec{a}$$