MAKROSKOPISCHE ELEKTRODYNAMIK

Mikroskopische Feldgleichungen

$$\operatorname{div}\vec{e} = 4\pi\left[\rho^{(ex)} + \rho^{(Mat)}\right]$$

$$\operatorname{div}\vec{b} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{b}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{b} = \frac{4\pi}{c}\left[\vec{j}^{(ex)} + \vec{j}^{(Mat)}\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}}{\partial t}$$

Annahme: keine mikroskopischen räumlichen Schwankungen

mit

$$\rho^{(Mat)}(\vec{r},t) = \sum_{j=1}^{N} q_j\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_j(t))$$

$$\vec{j}^{(Mat)}(\vec{r},t) = \sum_{j=1}^{N} q_j\,\vec{v}_j(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_j(t))$$

Wegmitteln der Atomistik $\Downarrow$ (räumliche Mittelung)

Makroskopische Feldgleichungen (ursprünglich rein phänomenologische Gln.)

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\left[\rho^{(ex)} + \rho \underbrace{- \operatorname{div}\vec{P}}_{\rho_P}\right]$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

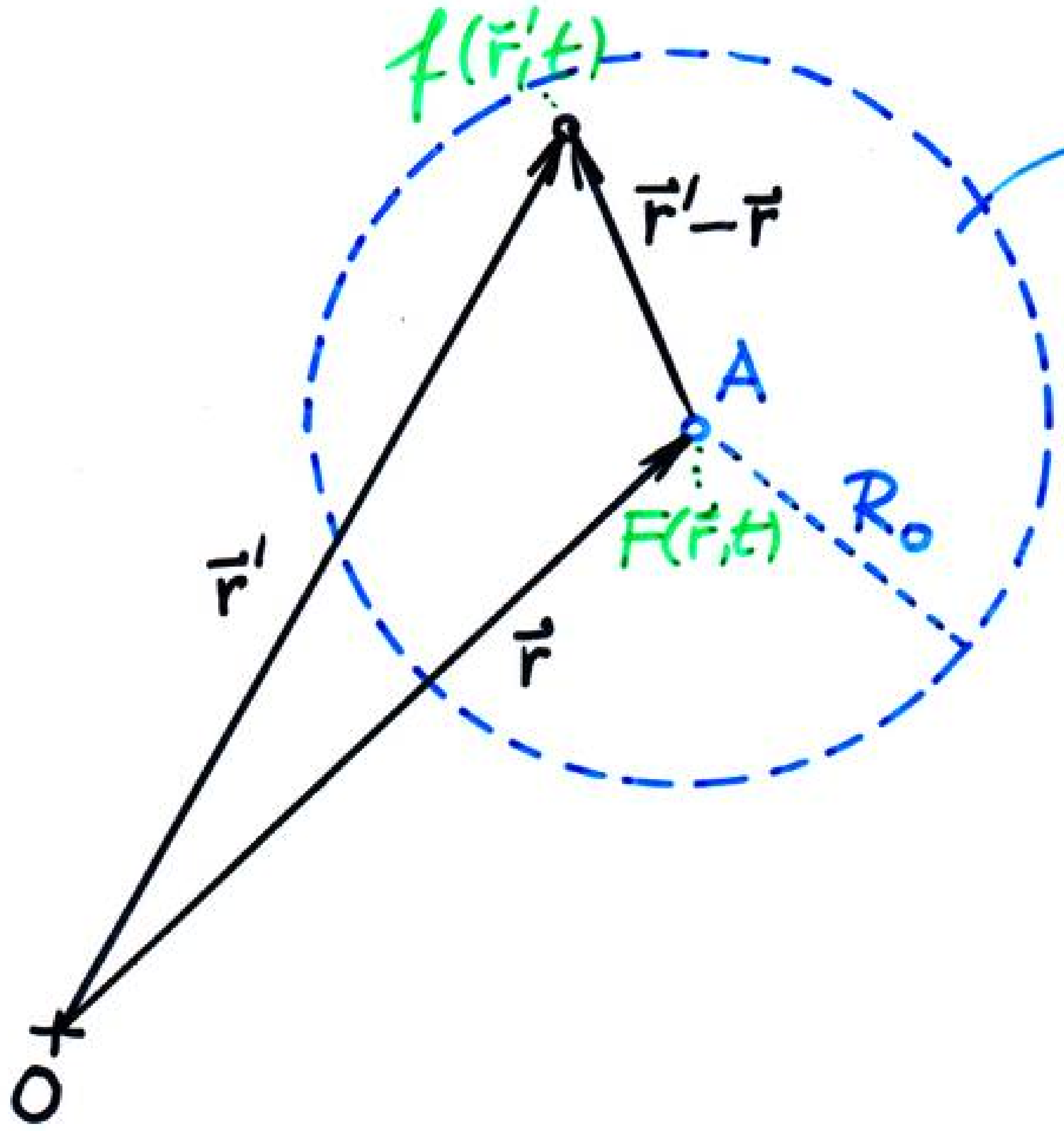
$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left[\vec{j}^{(ex)} + \vec{j} + \underbrace{\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}}_{\vec{j}_P} + \underbrace{c\operatorname{rot}\vec{M}}_{\vec{j}_M}\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Kontinuitätsgleichungen!

Räumliche Mittelung

1) Einfachste Art der Mittelung



$K_{R_0}(\vec r)$:

Kugel vom Radius $R_0 = L_0 \sim 100\,\text{Å}$ um Aufpunkt A

Volumen

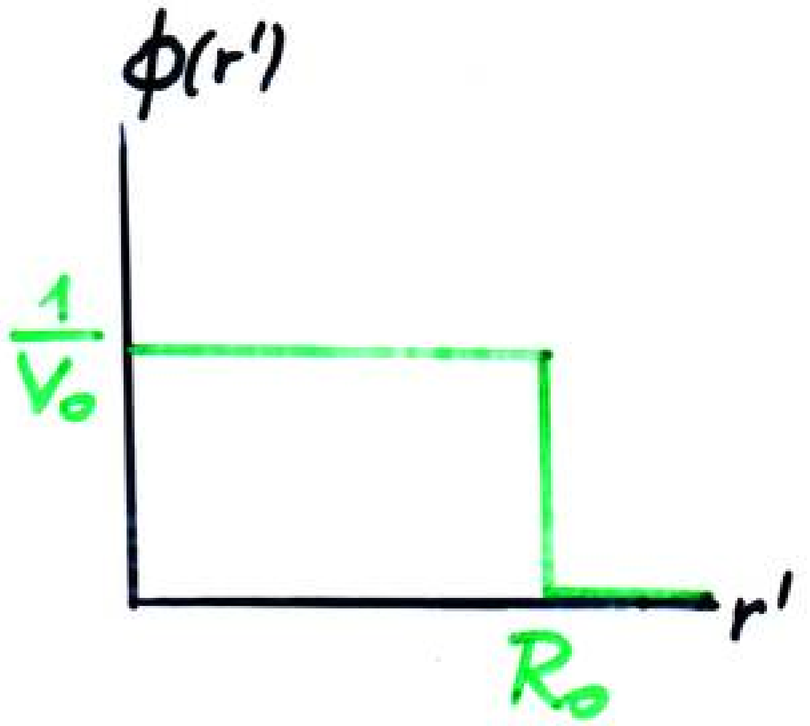
$$V_0 = \frac{4\pi R_0^3}{3}$$

"Lorentzkugel"

$$\underset{\uparrow}{F(\vec r,t)} = \langle f(\vec r,t)\rangle = \frac{1}{V_0}\int\limits_{K_{R_0}(\vec r)\uparrow} d^3r'\, f(\vec r',t)$$

bzw. mit

$$\underbrace{\phi(r')}_{\geq 0} = \begin{cases} \dfrac{1}{V_0} & \text{für } r' \leq R_0 \\ 0 & \text{für } r' > R_0 \end{cases}$$

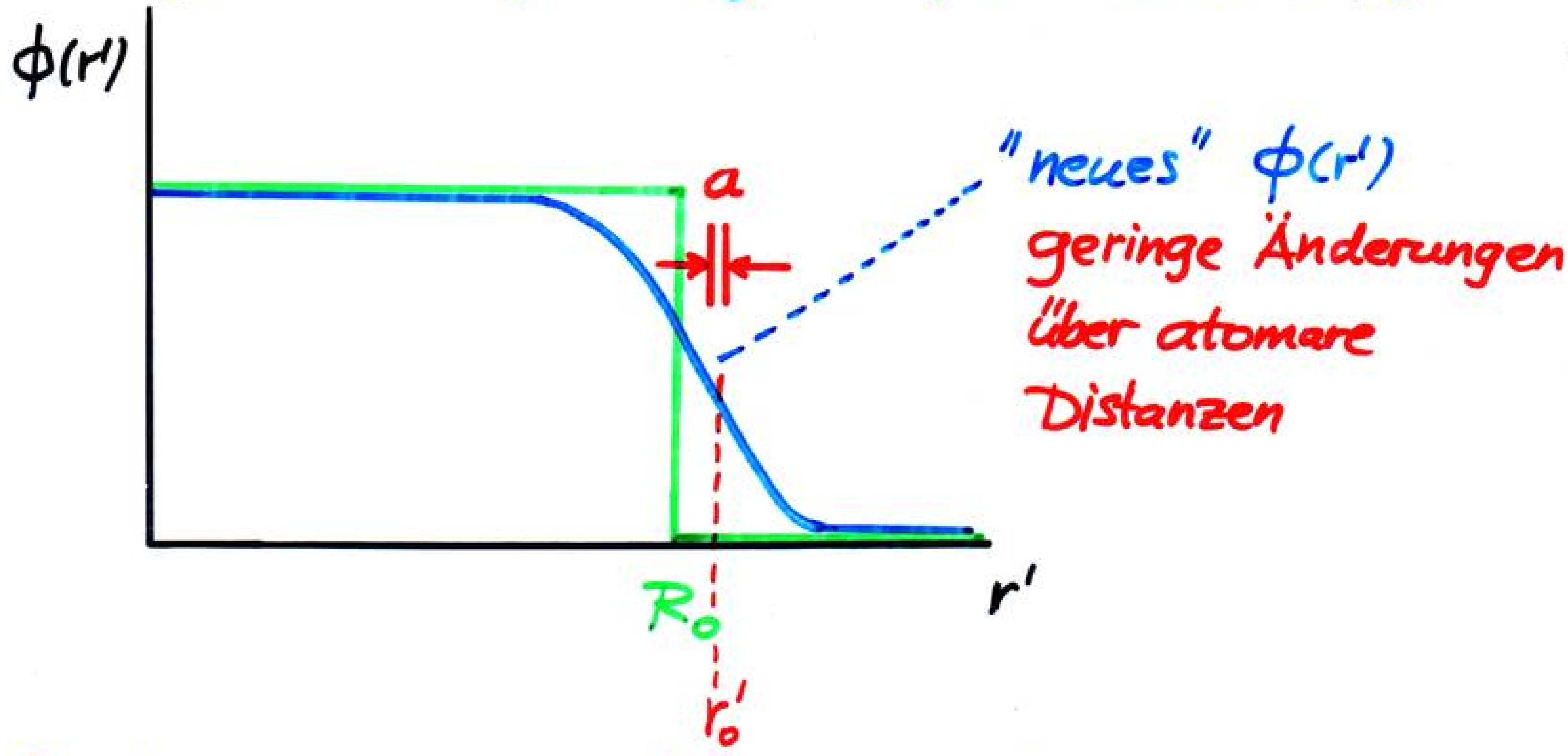


$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^3} \underbrace{d^3r'}_{r'^2 dr' d\Omega'}\, \phi(r') = 1 \qquad \left(\int_0^{+\infty} dr'\, r'^2 \phi(r') = \frac{1}{4\pi} \right)$$

$$\underset{\uparrow}{F(\vec r,t)} = \langle f(\vec r,t)\rangle = \int\limits_{\underset{\uparrow}{\mathbb{R}^3}} d^3r'\, \phi(|\vec r' - \underset{\uparrow}{\vec r}|)\, f(\vec r',t)$$

2) "Bessere" Art der Mittelung erforderlich! ("Zittern")

Verbesserung der Stetigkeitseigenschaften von $F(\vec{r},t)$



$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\phi(r') = 1 \quad , \quad \phi(|\vec{r}'-\vec{r}|) \text{ für } |\vec{r}'-\vec{r}_0| \lesssim a$$

durch Taylorpolynom 1. Ordnung an der Stelle $\vec{r}'=\vec{r}_0$ ersetzbar

$$F(\vec{r},t) = \langle f(\vec{r},t)\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\phi(|\vec{r}'-\vec{r}|)\,f(\vec{r}',t)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial F(\vec{r},t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\phi(|\vec{r}'-\vec{r}|)\,\frac{\partial f(\vec{r}',t)}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t} \right\rangle$$

$$\frac{\partial F(\vec{r},t)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\frac{\partial \phi(|\vec{r}'-\vec{r}|)}{\partial x_i}\,f(\vec{r}',t) = ?$$

$$\ldots = \left\langle \frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial x_i} \right\rangle$$

s. Folie 4 ("geschickter")

Beweis:

$$F(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \phi(|\vec{r}' - \vec{r}|) \, f(\vec{r}',t)$$

Substitution:
$\vec{r}'' = \vec{r}' - \vec{r}$

$$F(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \, \phi(|\vec{r}''|) \, f(\vec{r}'' + \vec{r},t)$$

$$\frac{\partial F(\vec{r},t)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \, \phi(|\vec{r}''|) \underbrace{\frac{\partial f(\overbrace{\vec{r}''+\vec{r}}^{\vec{r}'},t)}{\partial x_i}}_{\left(\frac{\partial f(\vec{r}',t)}{\partial x_i'}\right)_{\vec{r}' = \vec{r}'' + \vec{r}}}$$

"Rück"- Substitution

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \phi(|\vec{r}' - \vec{r}|) \frac{\partial f(\vec{r}',t)}{\partial x_i'} = \left\langle \frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial x_i} \right\rangle \quad \blacksquare$$

Durchführung der räumlichen Mittelung in den mikroskopischen Feldgleichungen: $\vec{E} := \langle \vec{e} \rangle$, $\vec{B} := \langle \vec{b} \rangle$

1) $$\underbrace{\langle \mathrm{div}\, \vec{e}(\vec{r},t) \rangle}_{\mathrm{div}\, \vec{E}(\vec{r},t)} = \underbrace{\langle 4\pi [\rho^{(ex)}(\vec{r},t) + \rho^{(Mat)}(\vec{r},t)] \rangle}_{4\pi [\underbrace{\langle \rho^{(ex)}(\vec{r},t) \rangle}_{\rho^{(ex)}(\vec{r},t)\ (\mathrm{VS})} + \langle \rho^{(Mat)}(\vec{r},t) \rangle]}$$

$$\mathrm{div}\, \vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi [\rho^{(ex)}(\vec{r},t) + \underbrace{\langle \rho^{(Mat)}(\vec{r},t) \rangle}]$$

Zu zeigen bleibt: $\rho(\vec{r},t) - \mathrm{div}\, \vec{P}(\vec{r},t) + \ldots$

(i.a.) Vernachlässigbar

2) $$\underbrace{\langle \mathrm{div}\, \vec{b}(\vec{r},t) \rangle}_{\mathrm{div}\, \vec{B}(\vec{r},t)} = \underbrace{\langle 0 \rangle}_{0}$$

$$\mathrm{div}\, \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \quad ✓$$

3) $$\underbrace{\langle \mathrm{rot}\, \vec{e}(\vec{r},t) \rangle}_{\mathrm{rot}\, \vec{E}(\vec{r},t)} = \underbrace{\langle -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}(\vec{r},t)}{\partial t} \rangle}_{-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}}$$

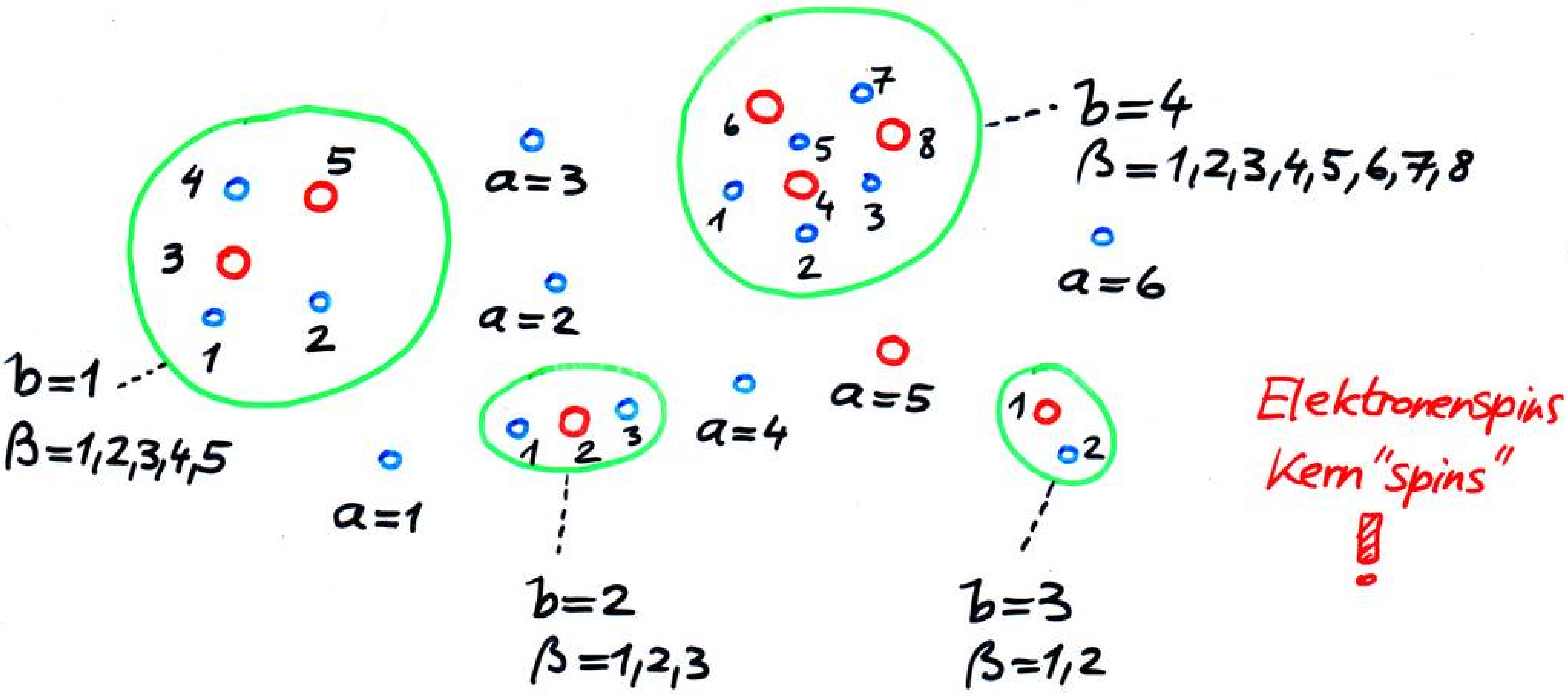
$$\mathrm{rot}\, \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \quad ✓$$

4) $$\langle \mathrm{rot}\, \vec{b}(\vec{r},t) \rangle = \left\langle \frac{4\pi}{c} \left[\vec{j}^{(ex)}(\vec{r},t) + \vec{j}^{(Mat)}(\vec{r},t) \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}(\vec{r},t)}{\partial t} \right\rangle$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c} \Big[\underbrace{\langle \vec{j}^{(ex)}(\vec{r},t) \rangle}_{\vec{j}^{(ex)}(\vec{r},t) \quad (\mathrm{VS})} + \langle \vec{j}^{(Mat)}(\vec{r},t) \rangle \Big] + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\underline{\mathrm{rot}\, \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c} \Big[\vec{j}^{(ex)}(\vec{r},t)} + \underbrace{\langle \vec{j}^{(Mat)}(\vec{r},t) \rangle}\Big] \underline{+ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}}$$

Zu zeigen bleibt: $\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{P}(\vec{r},t)}{\partial t} + c\, \mathrm{rot}\, \vec{M}(\vec{r},t) + \ldots$



$$\sum_{j=1}^{N}\dots \longrightarrow \sum_{a=1}^{N_u}\dots + \sum_{b=1}^{n_K}\sum_{\beta=1}^{N_b}\dots$$

Im gezeichneten Beispiel: $N = 24$ Elektronen + Kerne

$n_K = 4$ Komplexe

$N_1 = 5$ E+K

$N_2 = 3$ E+K

$N_3 = 2$ E+K

$N_4 = 8$ E+K

$$\sum_{b=1}^{4} N_b = 18 \quad \text{E+K}$$

$N_u = 6$ E+K

Allgemein:

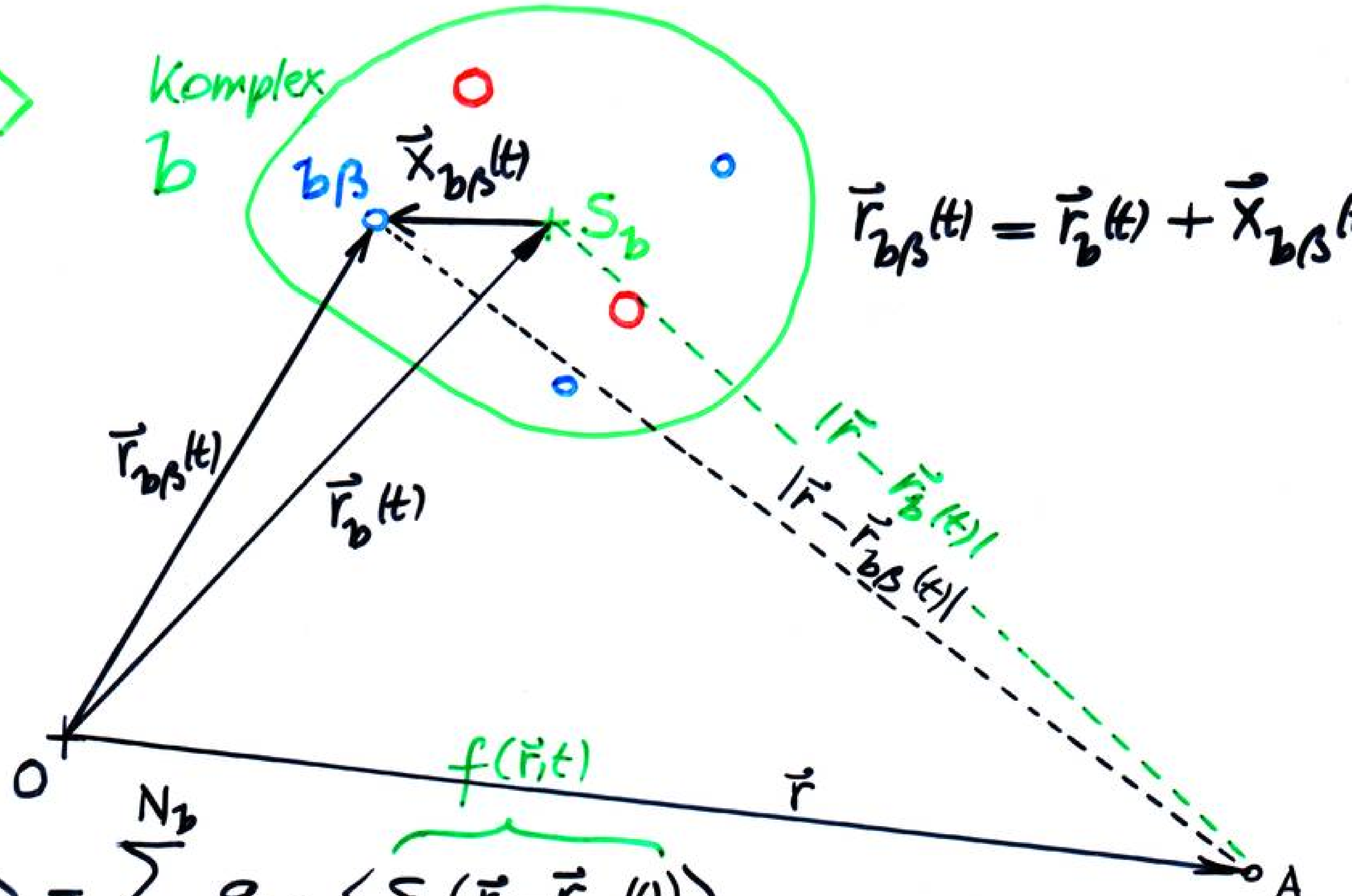
$$N = N_u + \sum_{b=1}^{n_K} N_b$$

Beweis von $\langle \rho^{(Mat)} \rangle = \rho - \mathrm{div}\,\vec{P} + \underbrace{\dots}$

$$\rho^{(Mat)}(\vec{r},t) = \sum_{a=1}^{N_u} q_a\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t)) + \sum_{b=1}^{n_K} \underbrace{\sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_{b\beta}(t))}_{=:\rho_b(\vec{r},t)}$$

$$\langle \rho^{(Mat)}(\vec{r},t) \rangle = \left\langle \sum_{a=1}^{N_u} q_a\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t)) \right\rangle + \sum_{b=1}^{n_K} \langle \rho_b(\vec{r},t) \rangle$$

$\langle \rho_b(\vec{r},t) \rangle$



$$\vec{r}_{b\beta}(t) = \vec{r}_b(t) + \vec{x}_{b\beta}(t)$$

$$\langle \rho_b(\vec{r},t) \rangle = \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta}\,\underbrace{\langle \overbrace{\delta(\vec{r}-\vec{r}_{b\beta}(t))}^{f(\vec{r},t)} \rangle}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\phi(|\vec{r}'-\vec{r}|)\,\overbrace{\delta(\vec{r}'-\vec{r}_{b\beta}(t))}^{f(\vec{r}',t)} = \phi(|\vec{r}-\vec{r}_{b\beta}(t)|)$$

Taylorentwicklung: $\phi(|\vec{r}-\vec{r}_{b\beta}(t)|) = \phi(|\vec{r}-\vec{r}_b(t)-\vec{x}_{b\beta}(t)|)$

$$= \underbrace{\phi(|\vec{r}-\vec{r}_b(t)|)}_{\langle \delta(\vec{r}-\vec{r}_b(t)) \rangle} - \underbrace{\vec{x}_{b\beta}(t)}_{\sim a} \cdot \underbrace{\mathrm{grad}\,\phi(|\vec{r}-\vec{r}_b(t)|)}_{\mathrm{grad}\,\langle \delta(\vec{r}-\vec{r}_b(t)) \rangle} + \underbrace{\dots}_{\sim a^2}$$

$$\langle\rho_b(\vec r,t)\rangle = \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta}\,\underbrace{\langle\delta(\vec r-\vec r_{b\beta}(t))\rangle}_{\langle\delta(\vec r-\vec r_b(t))\rangle - \vec x_{b\beta}(t)\cdot\operatorname{grad}\langle\delta(\vec r-\vec r_b(t))\rangle + \dots}$$

$$\langle\rho_b(\vec r,t)\rangle = \underbrace{\sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta}}_{=:\,q_b}\,\langle\delta(\vec r-\vec r_b(t))\rangle$$

Gesamtladung (elektrisches Monopol=moment) des Komplexes b

$$-\underbrace{\sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta}\,\vec x_{b\beta}(t)}_{=:\,\vec p_b(t)}\cdot\operatorname{grad}\langle\delta(\vec r-\vec r_b(t))\rangle + \dots$$

elektrisches Dipolmoment des Komplexes b (bzgl. des Schwerpunktes S_b)

$$\langle\rho_b(\vec r,t)\rangle = q_b\,\langle\delta(\vec r-\vec r_b(t))\rangle - \underbrace{\vec p_b(t)\cdot\operatorname{grad}\langle\delta(\vec r-\vec r_b(t))\rangle}_{\operatorname{div}\langle\vec p_b(t)\,\delta(\vec r-\vec r_b(t))\rangle} + \dots$$

$$\operatorname{div}(\vec a\,u(\vec r)) = \vec a\cdot\operatorname{grad}u(\vec r)$$

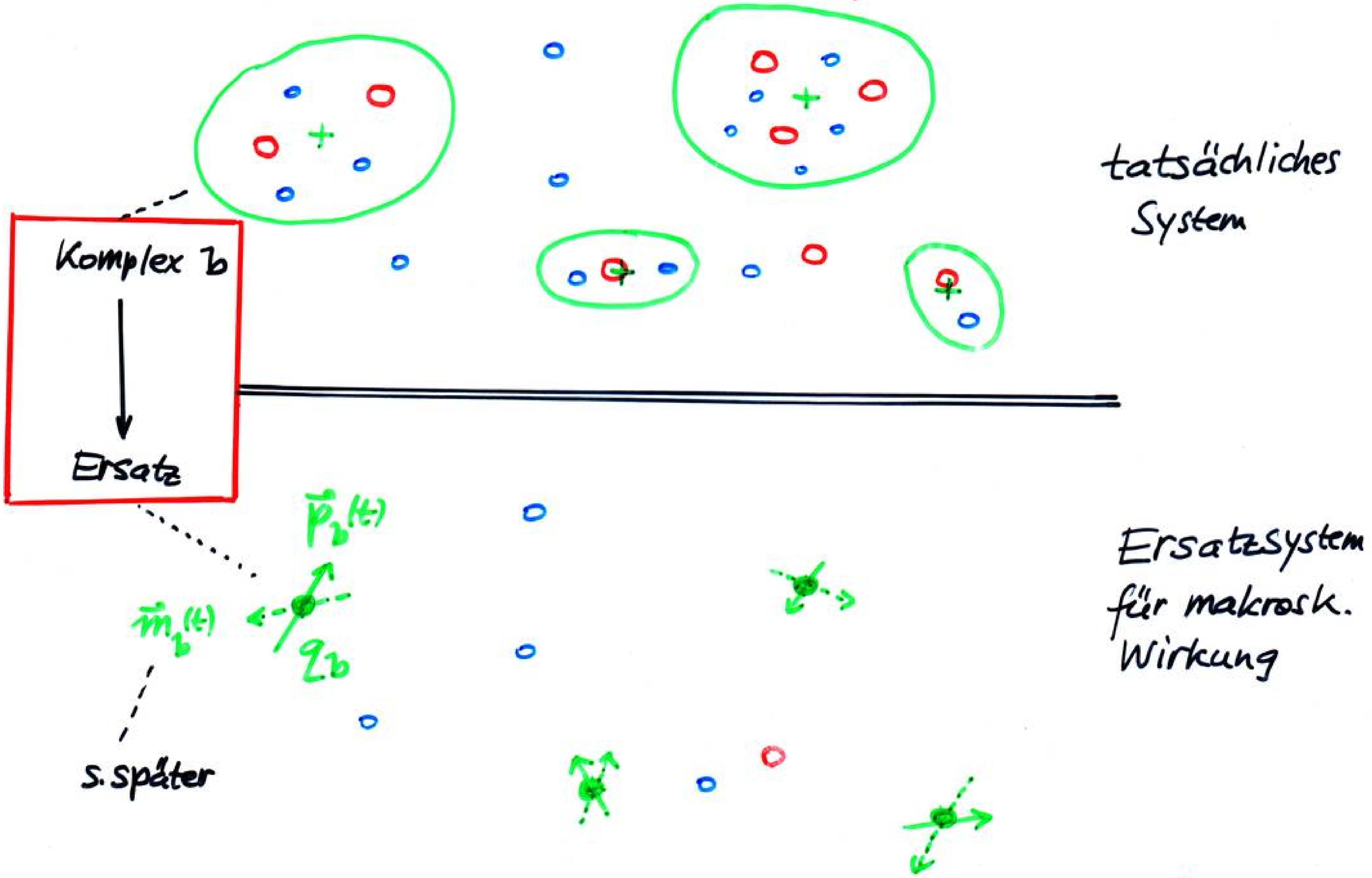
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i u(\vec r)) = a_i\frac{\partial u(\vec r)}{\partial x_i}$$

$$\langle \rho^{(Mat)}(\vec r,t)\rangle = \Big\langle \sum_{a=1}^{N_u} q_a\, \delta(\vec r - \vec r_a(t))\Big\rangle + \sum_{b=1}^{n_K} \langle \rho_b(\vec r,t)\rangle$$

$$\langle \rho_b(\vec r,t)\rangle = \langle q_b\, \delta(\vec r - \vec r_b(t))\rangle - \operatorname{div} \langle \vec p_b(t)\, \delta(\vec r - \vec r_b(t))\rangle + \ldots$$

$$\langle \rho^{(Mat)}(\vec r,t)\rangle = \underbrace{\Big\langle \sum_{a=1}^{N_u} q_a\, \delta(\vec r - \vec r_a(t)) + \sum_{b=1}^{n_K} q_b\, \delta(\vec r - \vec r_b(t))\Big\rangle}_{\rho(\vec r,t)}$$

$$- \operatorname{div} \underbrace{\Big\langle \sum_{b=1}^{n_K} \vec p_b(t)\, \delta(\vec r - \vec r_b(t))\Big\rangle}_{\vec P(\vec r,t)} + \ldots$$



$\vec p_b(t)$, $\vec m_b(t)$ entweder völlig durch äußeres Feld induziert oder auch permanenter Anteil!

Analog: $\vec{r}_{b\beta}(t) = \vec{r}_b(t) + \vec{x}_{b\beta}(t)$

$$\underline{\vec{v}_{b\beta}(t) = \vec{v}_b(t) + \vec{w}_{b\beta}(t)}$$

$$\underline{\vec{m}_b(t) := \frac{1}{2c}\sum_{\beta=1}^{N_b}\left[\vec{x}_{b\beta}(t) \times q_{b\beta}\,\vec{w}_{b\beta}(t)\right]}$$

magnet. Dipolmoment des Komplexes b bzgl. des Schwerpunktes

$$\langle \vec{j}^{(Mat)}(\vec{r},t)\rangle = \underbrace{\left\langle \sum_{a=1}^{N_u} q_a \vec{v}_a(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t)) + \sum_{b=1}^{n_K} q_b\,\vec{v}_b(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_b(t))\right\rangle}_{\vec{j}(\vec{r},t)}$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \vec{p}_b(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_b(t))\right\rangle}_{\vec{P}(\vec{r},t)}$$

$$+c\,\mathrm{rot}\underbrace{\left\langle \sum_{b=1}^{n_K}\underbrace{\left[\vec{m}_b(t) + \left(\vec{p}_b(t) \times \frac{\vec{v}_b(t)}{c}\right)\right]}_{=\vec{m}'_b(t)\ ^{*)}}\delta(\vec{r}-\vec{r}_b(t))\right\rangle}_{\vec{M}(\vec{r},t)}$$

$$+ \ldots$$

$\hookrightarrow$

*) 1) Beitrag $\left\langle \sum_{b=1}^{n_K}\left(\vec{p}_b(t) \times \frac{\vec{v}_b(t)}{c}\right)\delta(\vec{r}-\vec{r}_b(t))\right\rangle$

unter allen Umständen sehr klein!

2) Es fehlen die Spinbeiträge!

Makroskopische Elektrodynamik

Feldgleichungen (universell *))

*) "fast" (Quadrupolterme)

$$\boxed{\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{E} &= 4\pi\Big[\rho^{(ex)} + \underset{\downarrow\atop 0}{\rho} \underbrace{-\operatorname{div}\vec{P}}_{\rho_P}\Big] \\
\operatorname{div}\vec{B} &= 0 \\
\operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\
\operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\Big[\vec{j}^{(ex)} + \vec{j} + \underbrace{\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}}_{\vec{j}_P} + \underbrace{c\operatorname{rot}\vec{M}}_{\vec{j}_M}\Big] + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}}$$

Kontinuitätsgln.!

Materialgleichungen (mathematische Form nicht universell, sehr von Materieart abhängig *))

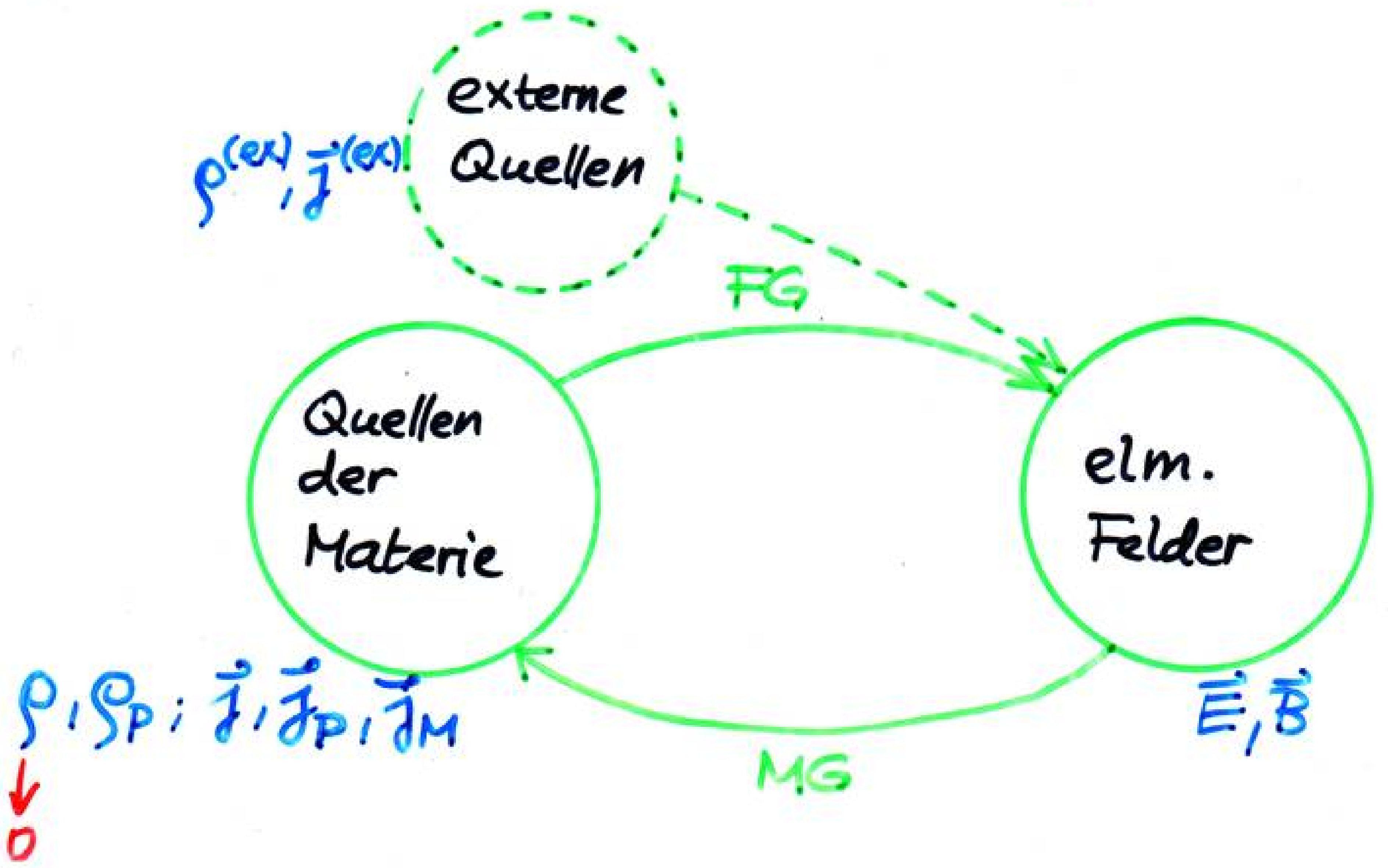
*) aber nicht nur: besser: VG!

$$\left(\rho[\vec{E},\vec{B}]\right),\ \boxed{\vec{j}[\vec{E},\vec{B}],\ \vec{P}[\vec{E},\vec{B}],\ \vec{M}[\vec{E},\vec{B}]}$$

z.B.:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E},\quad \vec{P} = \chi_e\vec{E},\quad \vec{M} = \chi_m\vec{B}$$

Logisches Schema: NICHT ZERLEGBAR!



Mathematisch gleichwertig, für praktische Rechnungen meist zweckmäßig, aber die physikalische Bedeutung "vernebelnd":

Hilfsfelder:
$$\vec{D} := \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$
$$\vec{H} := \vec{B} - 4\pi\vec{M}$$

Damit:

FG

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\left[\rho^{(ex)} + \overset{0}{\rho}\right]$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left[\vec{j}^{(ex)} + \vec{j}\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

MG $(\rho[\vec{E},\vec{B}])$

$$\vec{j}[\vec{E},\vec{B}], \quad \vec{D}[\vec{E},\vec{B}], \quad \vec{H}[\vec{E},\vec{B}]$$

z.B.:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$$

Vektoranalysis:

$\operatorname{div}\vec{a}$

$\operatorname{rot}\vec{a}$!

Historisch:

$$\vec{j}[\vec{E},\vec{H}], \quad \vec{D}[\vec{E},\vec{H}], \quad \vec{B}[\vec{E},\vec{H}]$$

z.B.

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

SI-Einheitensystem !