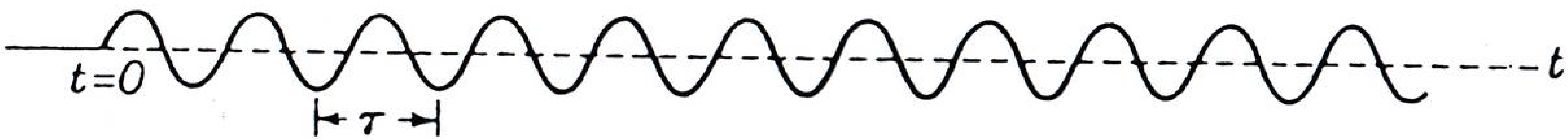
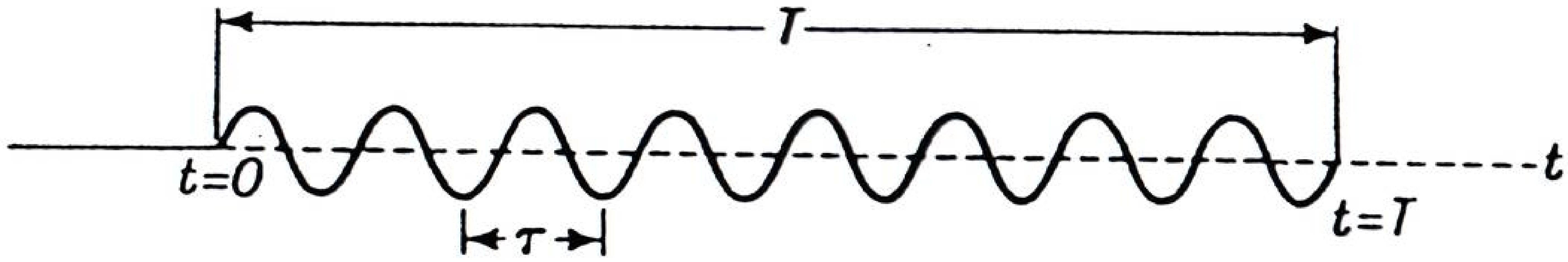
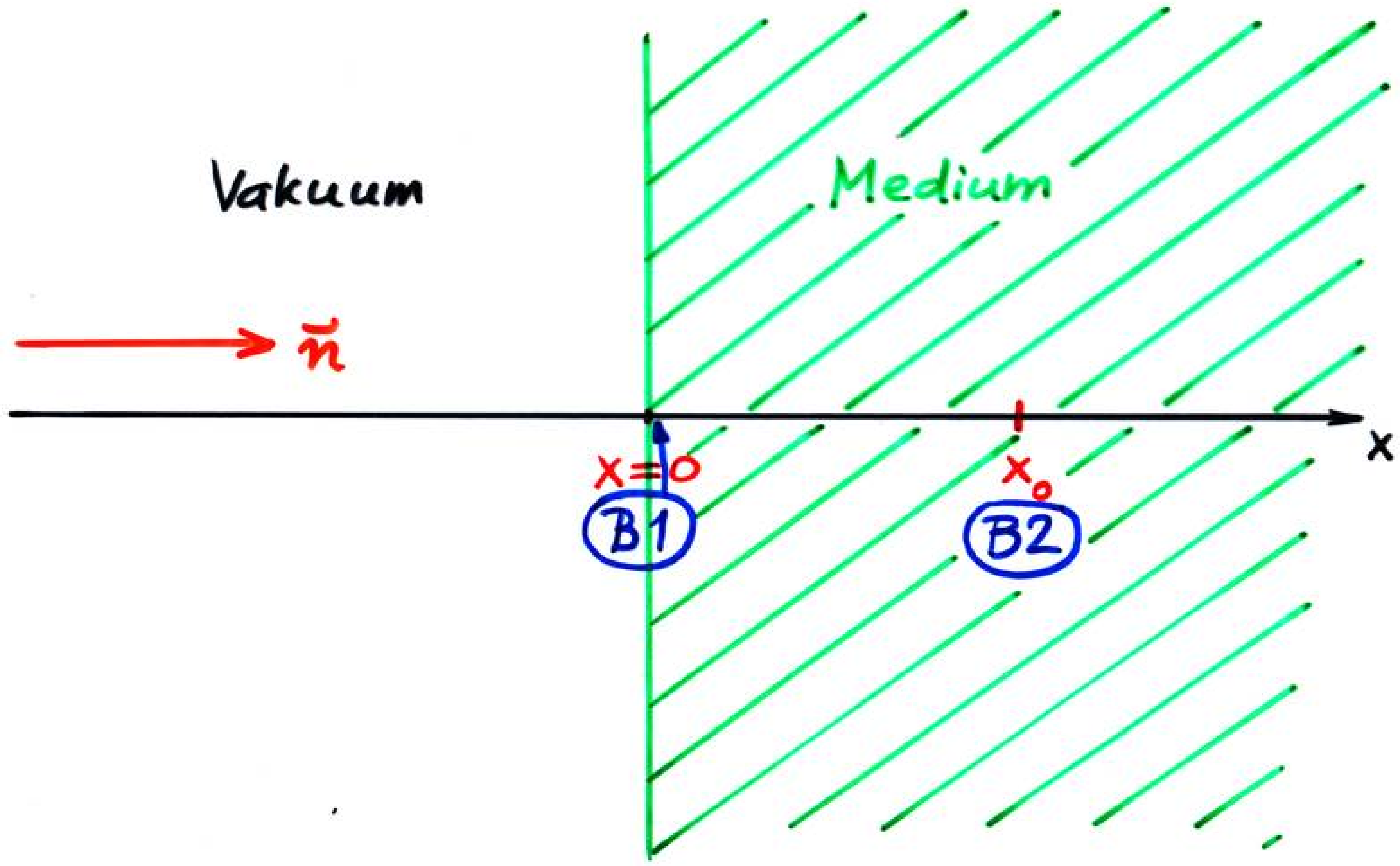
Beobachter B1: "halbunendlicher" Sinuswellenzug (Fall 1)

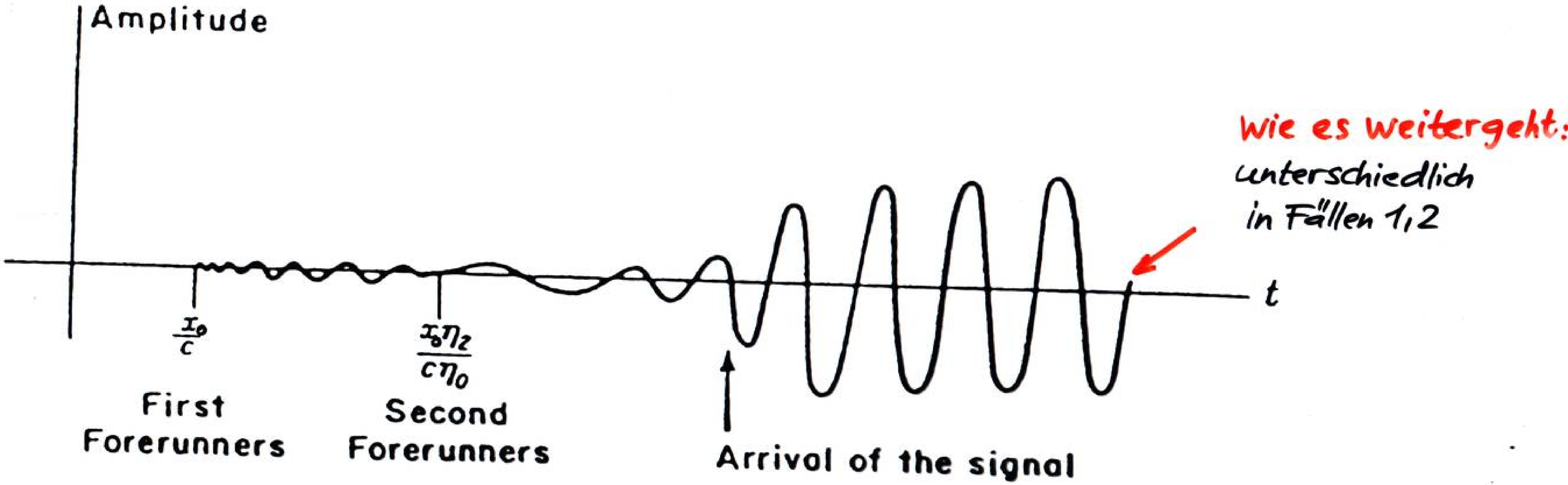


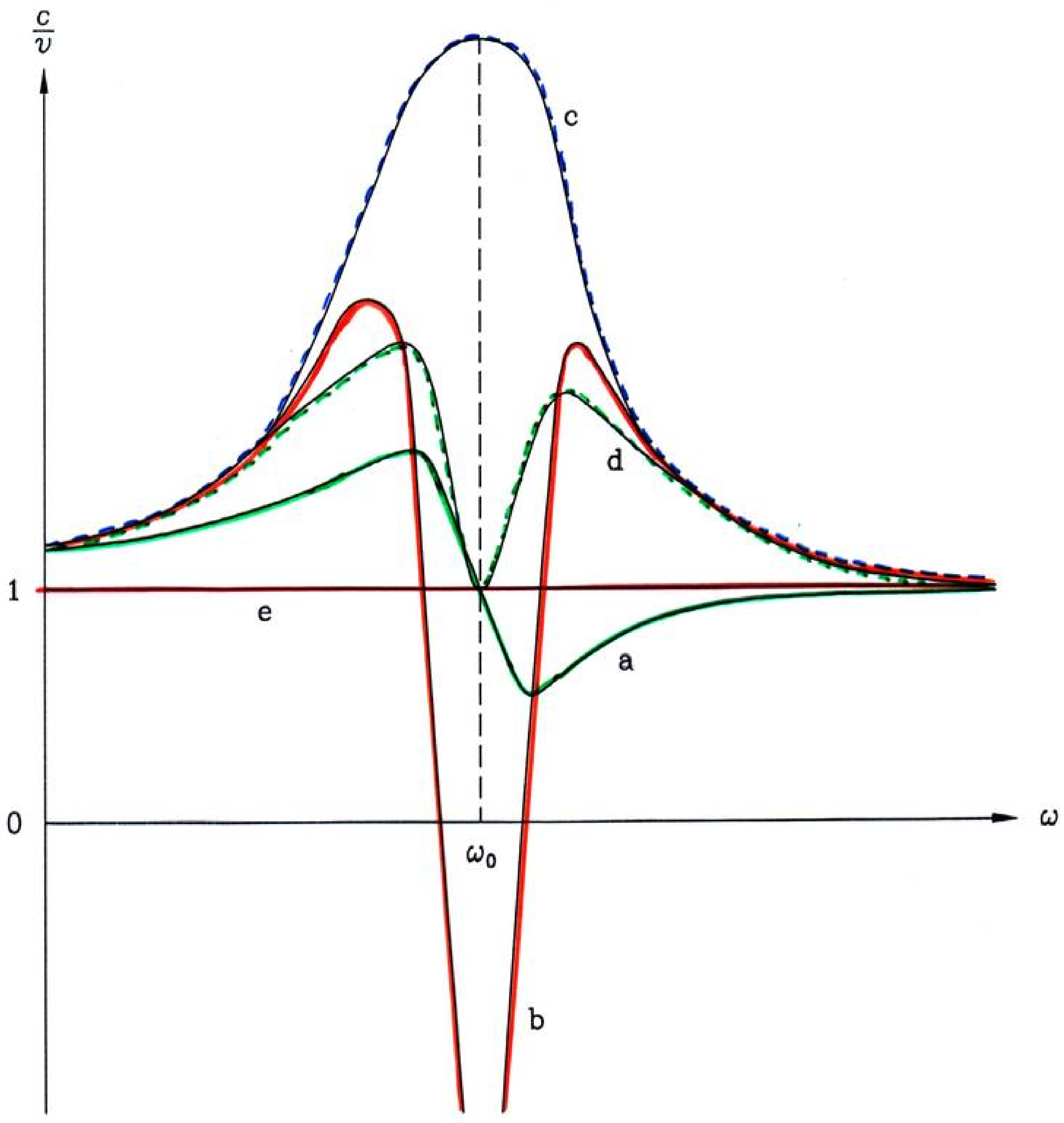
oder endlicher Sinuswellenzug (Fall 2)





Beobachter B2:





a Phasen-

b Gruppen-

c Energietransport-

d Signal-

e Front-

Geschwindigkeit

Elektromagnetische Wellen in Materie (unendlich ausgedehnt)

Annahmen: $\rho^{(ex)} \equiv 0$, $\vec{j}^{(ex)} \equiv \vec{0}$, $\rho \equiv 0$

$\vec{M} \equiv \vec{0}$

elm. Wellen im Medium: Verursacher?

Feldgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r},t) = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Hinweis: evt. Leitungsstrom in $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ (also in $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$) "gesteckt"

Materialgleichung

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) + \overbrace{4\pi \int_0^{+\infty} d\tau\, \alpha(\tau)\, \vec{E}(\vec{r},t-\tau)}^{\vec{P}(\vec{r},t)}$$

Mit komplexer Fourierzerlegung

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \vec{E}(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad \text{etc.}$$

folgt

$$\vec{D}(\vec{r},\omega) = \varepsilon(\omega)\, \vec{E}(\vec{r},\omega)$$

mit $$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^{+\infty} d\tau\, \alpha(\tau)\, e^{i\omega\tau}$$

Hinweis: Die obigen Feld- und Materialgln. sind auch für niedrige Frequenzen brauchbar, man ~~muß~~ kann dann aber

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

setzen.

Feld- und Materialgln. linear $\Rightarrow$

1) Superpositionsgesetz

2) komplexe Schreibweise anwendbar

LÖSUNGSANSATZ für Partikulärlösungen

Monochromatische (zeitlich harmonische) Wellen: ω vorgeg.

$$\begin{aligned}
\vec{E}_c(\vec r,t) &= \vec a\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}\\
\vec{B}_c(\vec r,t) &= \vec b\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}\\
\vec{D}_c(\vec r,t) &= \vec d\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}
\end{aligned} \qquad e^{-i\omega t} \qquad (1)$$

$\vec a, \vec b, \vec d, \vec k$ zunächst noch unabhängige konstante komplexe Vektoren (auch $\vec k$!)

Hinweis: Noch kein Zusammenhang $k \leftrightarrow \omega$ ("Dispersionsbeziehung") angenommen.

[Vakuum: $\vec k = k\vec n$ reell, $k = k(\omega) = \frac{\omega}{c}$ reell]

Materialgleichung dann und nur dann erfüllt, falls

$$\boxed{\vec d = \varepsilon(\omega)\,\vec a} \qquad (2)$$

gilt

Einsetzen von (1) mit (2) in die

Feldgleichungen gibt als weitere notwendige und hinreichende Bedingungen

$$\begin{aligned}
\vec k\cdot\vec a &= 0 \quad , \quad & \vec k\times\vec a &= \frac{\omega}{c}\vec b\\
\vec k\cdot\vec b &= 0 \quad , \quad & \vec k\times\vec b &= -\frac{\omega}{c}\varepsilon(\omega)\vec a
\end{aligned}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man

$$\vec{k} = k\vec{n} \tag{3a}$$

mit

$$\vec{n}^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1, \tag{3b}$$

$$k \in \mathbb{C}$$

setzen.

Hinweis: $\vec{n}$ kann dabei ein komplexer Vektor sein! [Vakuum: $\vec{n}$ reell, k reell, $k = \frac{\omega}{c}$]

Dann folgen die Bedingungen:

$$\vec{n}\cdot\vec{a} = 0 \quad , \quad k(\vec{n}\times\vec{a}) = \frac{\omega}{c}\vec{b}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{b} = 0 \quad , \quad k(\vec{n}\times\vec{b}) = -\frac{\omega}{c}\varepsilon(\omega)\vec{a}$$

Diese sind nur dann widerspruchsfrei (Aufgabe 13), falls

$$\boxed{k = k(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}\,\frac{\omega}{c}} \tag{4}$$

$k(\omega)$ also (i.a.) komplexwertig!

"Dispersionsbeziehung"

gilt.

Hinweis: $\sqrt{}$ ist im Komplexen zweideutig. Später wird gezeigt, daß aus physikal. Gründen in (4) der Hauptwert zu wählen ist.

Es bleiben die Bedingungen

$$\vec{n}\cdot\vec{a} = 0 \tag{5}$$

$$\vec{b} = \vec{n}\times\sqrt{\varepsilon(\omega)}\,\vec{a} \tag{6}$$

Hinweis: Ist $\vec{n}$ komplex, bedeuten (5), (6) nicht Transversalität, dies trifft nur für reelles $\vec{n}$ zu.

Zusammenfassung: ω vorgegeben (monochr. Welle)

$$\vec{E}_c(\vec{r},t) = \vec{a}\, e^{i(k(\omega)\vec{n}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}_c(\vec{r},t) = \vec{n} \times \sqrt{\varepsilon(\omega)}\, \vec{E}_c(\vec{r},t)$$

$$\vec{D}_c(\vec{r},t) = \varepsilon(\omega)\, \vec{E}_c(\vec{r},t)$$

mit

$$k(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}\, \frac{\omega}{c} \qquad \text{(Hauptwert von } \sqrt{\varepsilon(\omega)}\text{)}$$

stellt eine Partikulärlösung der Feld- und Materialgln. dar, wofern die komplexen Vektoren $\vec{a}, \vec{n}$ die Bedingungen

$$\vec{n}^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

$$\vec{n}\cdot\vec{a} = n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z = 0$$

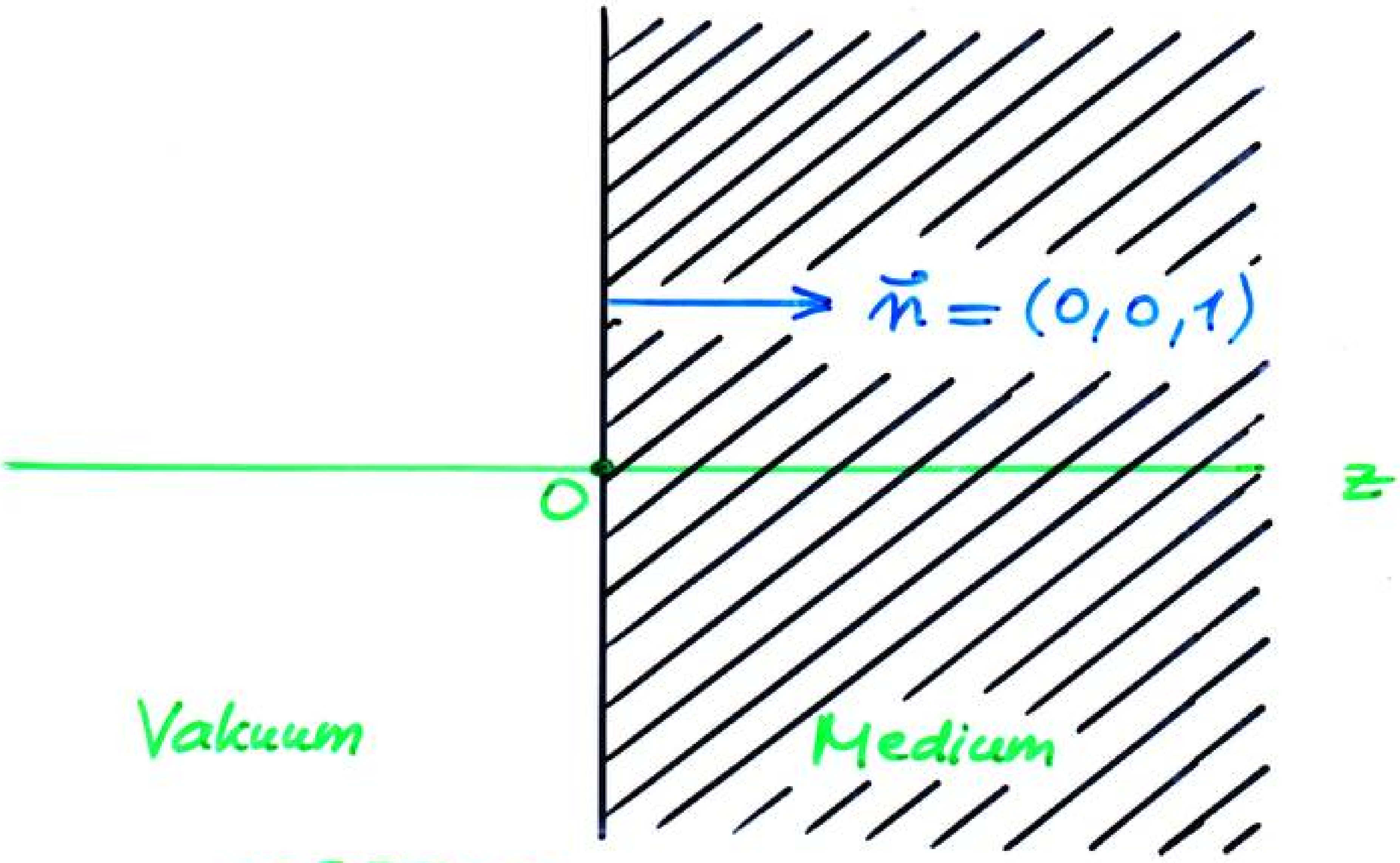
erfüllen.

Fall 1) $\vec{n}$ komplex (d.h. n_x, n_y, n_z nicht alle reell)
"inhomogene monochromatische Welle"
Interpretation (tatsächliche Ausbreitungsrichtung, Phasengeschwindigkeit etc.) im jeweiligen Beispiel zu suchen; tritt z.B. bei Totalreflexion auf

oft auch "ebene Welle" genannt!

Fall 2) $\vec{n}$ reell, dann ist $\vec{n}$ Ausbreitungsvektor und es handelt sich um eine in Richtung $\vec{n}$ fortschreitende monochrom. ebene Welle

Vorübergehend
nur ("echte") ebene Wellen betrachtet ($\vec{n}$ reell).



$$\vec{n}\cdot\vec{r} = z > 0$$

$$\vec{E}_c(z,t) = \vec{a}\, e^{i(k(\omega)z - \omega t)}$$

$\vec{a}\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow$ $\quad \vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y \,, \quad k(\omega) = k'(\omega) + i k''(\omega)$

$$\vec{E}_c(z,t) = \vec{a}\, e^{-k''(\omega)z}\; e^{i(k'(\omega)z - \omega t)} \,, \quad z > 0$$

$\Rightarrow$

$$k(\omega) = \underbrace{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}\, \frac{\omega}{c}$$

Wurzel muß so gezogen werden, daß

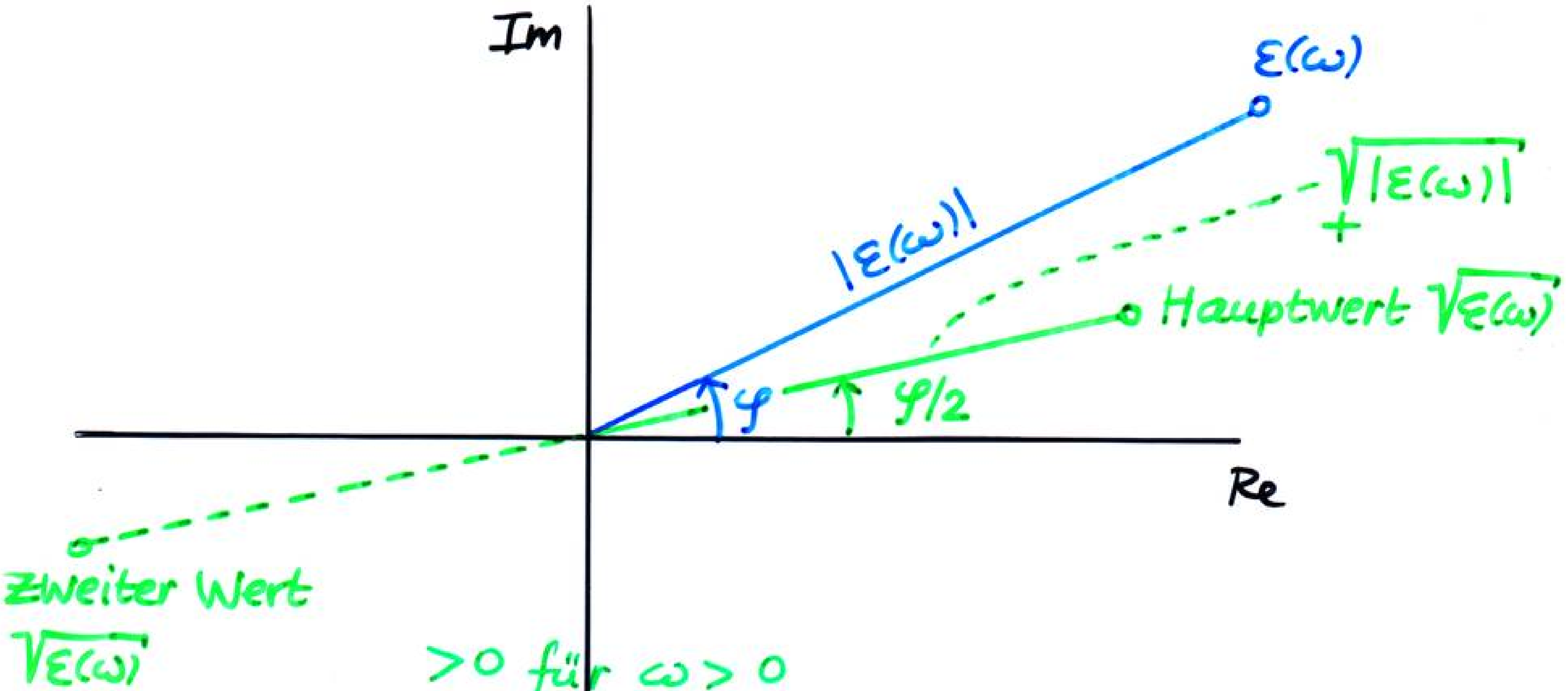
$k'(\omega) > 0$ $\quad$ (VS; s. oben)

$k''(\omega) > 0$ $\quad$ (Extinktion!)

gilt.

<u>$\omega > 0$ betrachtet</u> (Fall $\omega < 0$ analog)

$$\varepsilon(\omega) = \underbrace{\varepsilon'(\omega)}_{>0} + i\underbrace{\varepsilon''(\omega)}_{>0} \quad \text{für } \omega > 0$$



$$k(\omega) = \underbrace{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}_{>0 \text{ für } \omega>0} \frac{\omega}{c}$$

, also $k'(\omega), k''(\omega)$ beide > 0, wenn man <u>Hauptwert</u> nimmt

$$k'(\omega) + i k''(\omega) = \sqrt{\varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)} \cdot \frac{\omega}{c}$$

$$\downarrow \quad \text{(AUFGABE 14)}$$

$$k'(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon'(\omega) + \sqrt{\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)}}{2}} \cdot \frac{\omega}{c}$$

$$k''(\omega) = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\sqrt{2\left[\varepsilon'(\omega) + \sqrt{\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)}\right]}} \cdot \frac{\omega}{c}$$

$$k''(\omega) = 0 \iff \varepsilon''(\omega) = 0$$

(Hinweis: streng null nur für $\omega = 0$ möglich)

Somit: $\varepsilon''(\omega)$ für <u>Absorption</u> (Extinktion) der Welle "verantwortlich"

$$\vec{E}_c(z,t) = \underbrace{\vec{a}}_{a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y}\, e^{-k''(\omega)z}\, e^{i(k'(\omega)z-\omega t)}$$

Phasengeschwindigkeit

$$v_{Ph}(\omega) = \frac{\omega}{k'(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\varepsilon'(\omega)+\sqrt{\varepsilon'^2(\omega)+\varepsilon''^2(\omega)}}{2}}}$$

"Transparenz=bereich"

$$\approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'(\omega)}} \quad \text{falls } \varepsilon''(\omega) \ll \varepsilon'(\omega)$$

Dispersion

Eindringtiefe

$$d(\omega) = \frac{1}{k''(\omega)} = \frac{\sqrt{2\left[\varepsilon'(\omega)+\sqrt{\varepsilon'^2(\omega)+\varepsilon''^2(\omega)}\right]}}{\varepsilon''(\omega)} \cdot \frac{c}{\omega}$$

"Transparenz=bereich"

$$\approx \frac{2\sqrt{\varepsilon'(\omega)}}{\varepsilon''(\omega)} \cdot \frac{c}{\omega} \quad \text{falls } \varepsilon''(\omega) \ll \varepsilon'(\omega)$$

Extinktion (Absorption)

Aufgabe 15

"TRANSPARENTE MEDIEN"

Annahme: Alle im betrachteten Strahlungspuls enthaltenen Frequenzen gehören Transparenzbereichen $\mathcal{T}$ des Mediums an:

$$\varepsilon''(\omega) \ll \varepsilon'(\omega) \quad , \quad \forall \omega \text{ des Strahlungspulses}$$

Näherung:

$$\varepsilon''(\omega) = 0 \quad , \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) \, ,$$

$\forall \omega$ des Strahlungspulses gesetzt

Damit ergibt sich für eine in Richtung $\vec{n}$ fortschreitende monochromatische ebene Welle mit $\omega \in \mathcal{T}$

$$\vec{E}_c(\vec{r},t) = \vec{a}\, e^{i(\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Transversalwelle

$$\vec{B}_c(\vec{r},t) = \vec{n} \times \sqrt{\varepsilon(\omega)}\, \vec{E}_c(\vec{r},t)$$

$\Rightarrow$ reell ------ mit $\vec{k}(\omega) = k(\omega)\,\vec{n} = \sqrt{\varepsilon(\omega)}\,\frac{\omega}{c}\,\vec{n}$

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = 0$$

reell reell

$\vec{D}_c(\vec{r},t)$ hier und im folgenden nicht angeschrieben

Vergleich $\begin{cases} \text{Vakuum} \\ \text{"transparentes Medium" ohne Dispersion, d.h. hinreichend niedrige } \omega \ (\varepsilon(\omega) = \varepsilon, \text{ stat. W.}) \\ \text{"transparentes Medium" mit Dispersion} \end{cases}$

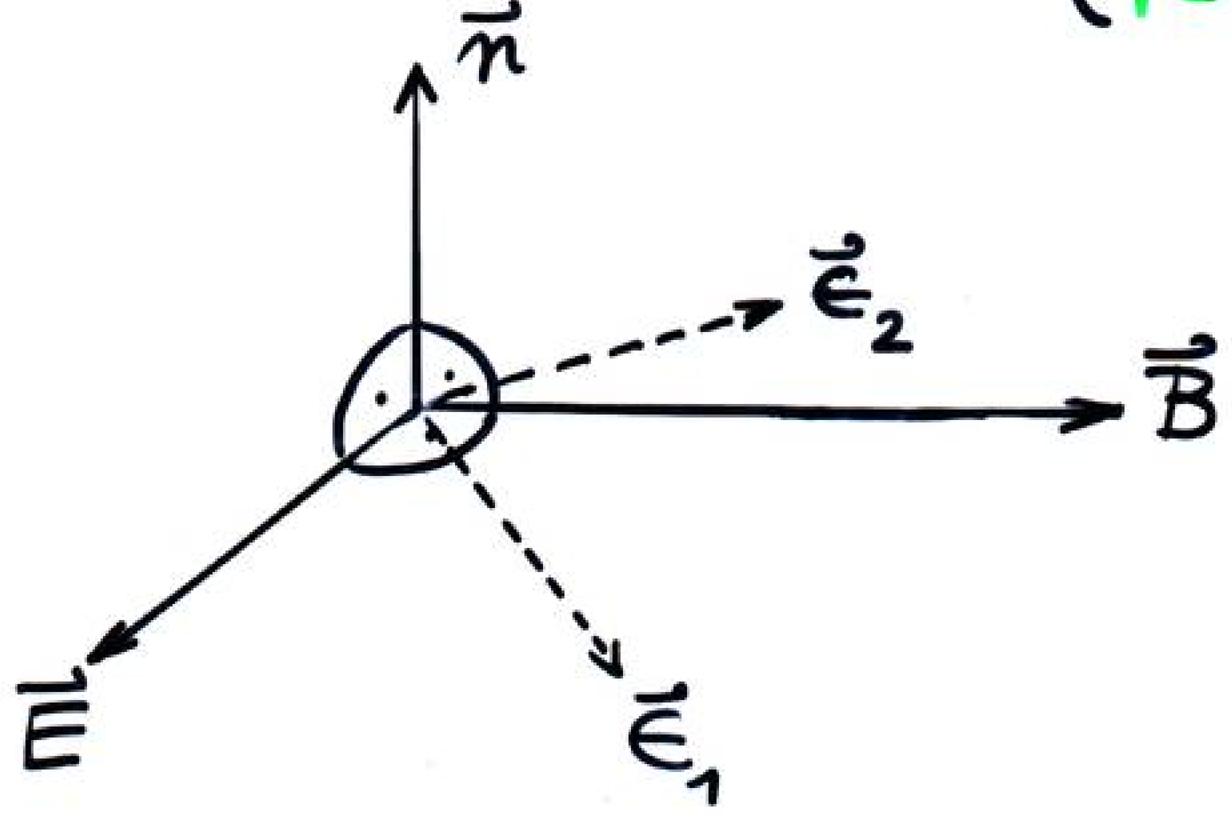
1) Monochromatische ebene Welle (reelle Schreibweise)

$$\vec{k}(\omega) = k(\omega)\,\vec{n} = \frac{\omega}{c}\vec{n} \cdot \begin{cases} 1 \\ \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon(\omega)} \end{cases}$$

$$v_{ph} = \begin{cases} c \\ \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} < c \\ \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} \lesseqgtr c \end{cases} \qquad \lambda = \begin{cases} \frac{2\pi c}{\omega} \equiv \lambda_{Vak} \\ \frac{2\pi c}{\sqrt{\varepsilon}\,\omega} < \lambda_{Vak} \\ \frac{2\pi c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}\,\omega} \lesseqgtr \lambda_{Vak} \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} \vec{\epsilon}_\alpha E_{0\alpha} \cos\left[\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_\alpha\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r},t) \cdot \begin{cases} 1 \\ \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon(\omega)} \end{cases}$$



$$\cancel{u_{el} = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2 \cdot \begin{cases} 1 \\ \varepsilon \end{cases}}$$

$$\cancel{u_{magn} = \frac{1}{8\pi}\vec{B}^2 \cdot \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{\mu} = 1 \end{cases}}$$

s. später

2) Nichtmonochromatische periodische ebene Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\ell=1,2,\ldots} \sum_{\alpha=1,2} \vec{\epsilon}_\alpha E_{0\alpha}^{(\ell)} \cos[\vec{k}(\underbrace{\ell\cdot\omega_0}_{\omega^{(\ell)}})\cdot\vec{r} - \underbrace{\ell\cdot\omega_0}_{\omega^{(\ell)}} t + \delta_\alpha^{(\ell)}]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r},t)\cdot\begin{cases}1\\ \sqrt{\varepsilon}\end{cases}$$

i.a.

$(E_{01}^{(\ell)}, E_{02}^{(\ell)}) \neq (0,0)$ für mindest 2 ℓ-Werte

s. Aufgabe 16

$$\vec{k}(\omega) = \frac{\omega}{c}\vec{n}\cdot\begin{cases}1\\ \sqrt{\varepsilon}\end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \lambda = cT\cdot\begin{cases}1\\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\end{cases}$$

3) Allgemeine aperiodische ebene Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} \vec{\epsilon}_\alpha f_\alpha\left(\vec{n}\cdot\frac{\vec{r}}{c}\cdot\begin{cases}1\\ \sqrt{\varepsilon}\end{cases} - t\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1,2} \vec{\epsilon}_\alpha \int_0^{+\infty} d\omega\, \underbrace{E_{0\alpha}(\omega)}_{} \cos[\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_\alpha(\omega)]$$

$$\vec{k}(\omega) = \frac{\omega}{c}\vec{n}\cdot\begin{cases}1\\ \sqrt{\varepsilon}\\ \sqrt{\varepsilon(\omega)}\end{cases}$$

$$f_\alpha \begin{cases}\text{belieb. aper. Fkt.}\\ \text{nur spezielle aper. Fkt.}\end{cases}$$

darf $\neq 0$ sein für $\begin{cases}\omega \in [0,+\infty)\\ \text{hinreichend niedrige } \omega\\ \omega \in \mathcal{T}\end{cases}$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r},t)\cdot\begin{cases}1\\ \sqrt{\varepsilon}\end{cases}$$

$$= \vec{n} \times \sum_{\alpha=1,2} \vec{\epsilon}_\alpha \int_0^{+\infty} d\omega \begin{cases}1\\ \sqrt{\varepsilon}\\ \sqrt{\varepsilon(\omega)}\end{cases} E_{0\alpha}(\omega)\cos[\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_\alpha(\omega)]$$

$\begin{cases}\text{nichtzerfließendes}\\ \text{nichtzerfließendes}\\ \text{zerfließendes ("dispergiertes")}\end{cases}$ Signal

4) <u>Wellenpakete</u> (Lösungen zu allgemeinen Anfangsbedingungen)

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \, \underbrace{\vec{E}_{0\alpha}(\vec{k})}_{} \cos\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t + \delta_\alpha(\vec{k})\right]$$

darf $\neq 0$ sein für $\begin{cases} \vec{k} \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{k}\text{-Vektoren, für die } \omega(k) \text{ hinreichend klein} \\ \vec{k}\text{-Vektoren, für die } \omega(k) \in \mathcal{T} \end{cases}$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \left(\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}_{0\alpha}(\vec{k})\right) \cdot \begin{cases} 1 \\ \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon(\omega(k))} \end{cases} \cos\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t + \delta_\alpha(\vec{k})\right]$$

$$k = k(\omega) = \frac{\omega}{c} \cdot \begin{cases} 1 \\ \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon(\omega)} \end{cases} \longleftrightarrow \omega = \omega(k)$$

$\vec{k}, \vec{E}_{01}(\vec{k}), \vec{E}_{02}(\vec{k})$ orthogonales Dreibein (RS)

Polarisationszustand und Intensität einer monochromatischen ebenen Welle im Fall vernachlässigbarer Absorption

Polarisationszustand: ohne oder mit Dispersion wie im Vakuum

Intensität:

Medium (s. später)

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t)\right]$$

Für den Fall $\vec{H}(\vec{r},t) \approx \vec{B}(\vec{r},t)$ folgt also derselbe Ausdruck für $\vec{S}$ wie im Vakuum, aber:

$$I = \left|\overline{\vec{S}(\vec{r},t)}\right| = \frac{c}{4\pi}\,\overline{\vec{E}^2(\vec{r},t)} \cdot \begin{cases} 1 \\ \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon(\omega)} \end{cases}$$

$$= \frac{c}{8\pi}\left(E_{01}^2 + E_{02}^2\right) \cdot \begin{cases} 1 \\ \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon(\omega)} \end{cases}$$