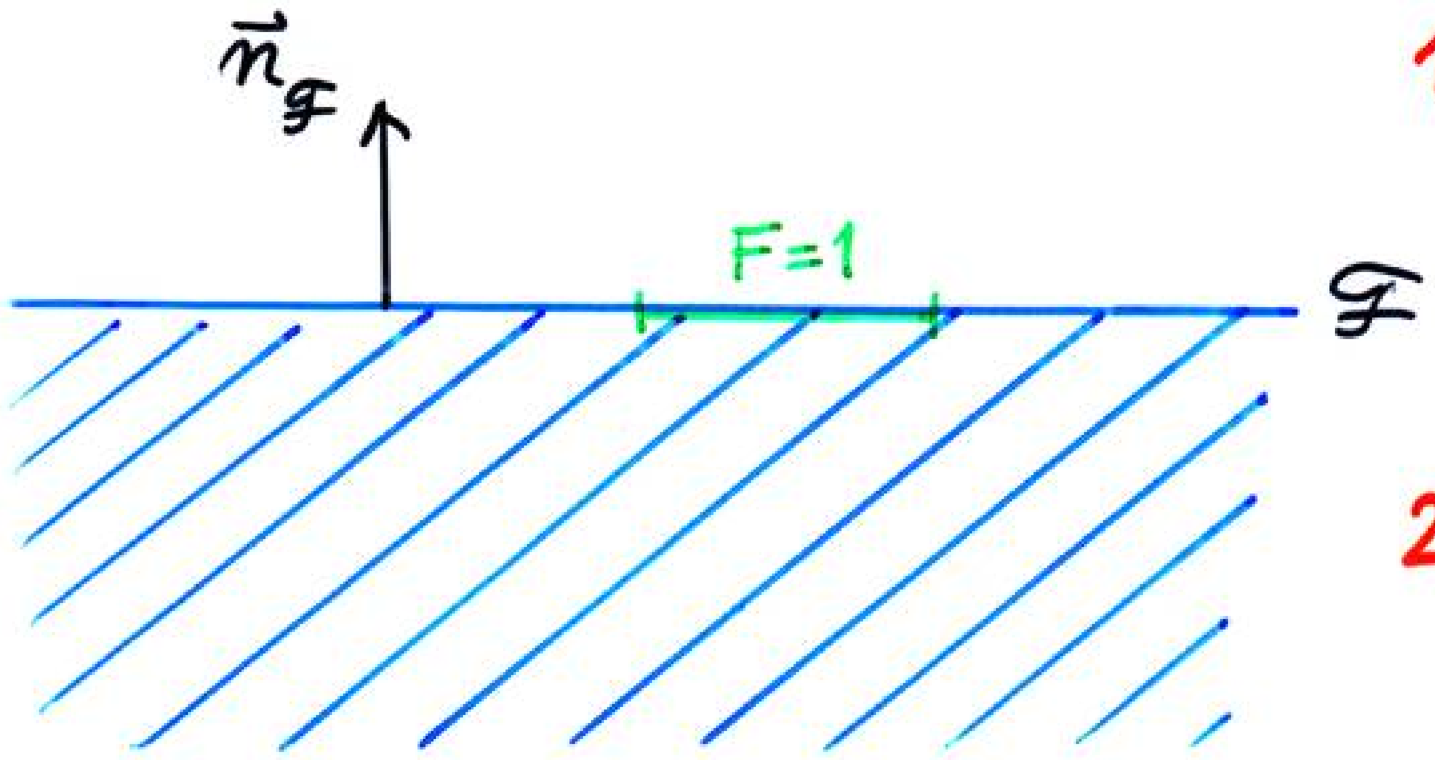
Elektromagnetische Energiestromdichte im Medium

"Naheliegend" (Interpretation!)

$$\boxed{\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t)\right]}$$

Begründung: Grenzfläche Vakuum – Medium betrachtet



1 Vakuum

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})$, $\vec{B} = \vec{H}$

2 Medium

$\vec{S} = ?$

1) Annahme: $\vec{K} = \vec{0}$ auf $\mathcal{F}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\vec{H}_{1,t} = \vec{H}_{2,t}\\ \vec{E}_{1,t} = \vec{E}_{2,t}\end{array}}$

Für einen beliebigen Vektor der Form $\vec{a} \times \vec{b}$ gilt auf $\mathcal{F}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a}_n + \vec{a}_t) \times (\vec{b}_n + \vec{b}_t)$$

$$= \underbrace{(\vec{a}_n \times \vec{b}_n)}_{\vec{0}}$$

$$+ \underbrace{(\vec{a}_n \times \vec{b}_t) + (\vec{a}_t \times \vec{b}_n)}_{(\vec{a} \times \vec{b})_t}$$

$$+ \underbrace{(\vec{a}_t \times \vec{b}_t)}_{(\vec{a} \times \vec{b})_n}$$

$$\vec{S}_{1,n} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}_{1,t} \times \vec{B}_{1,t}) = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}_{1,t} \times \vec{H}_{1,t})$$

$= \vec{S}_{2,n}$ muß wegen Energieerhaltung auf $\mathcal{F}$ gelten

Nimmt man im Medium $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{H})$ an,
so ist die Energieerhaltung gewährleistet (hinreichende, nicht notwendige Bedingung):

$$\vec{S}_{1,n} = \frac{c}{4\pi}(\underset{\substack{\| \\ \vec{E}_{2,t}}}{\vec{E}_{1,t}} \times \underset{\substack{\| \\ \vec{H}_{2,t}}}{\vec{H}_{1,t}})$$

gemäß Grenzbedingungen!

$$= \frac{c}{4\pi}(\vec{E}_{2,t} \times \vec{H}_{2,t}) = \vec{S}_{2,n} \quad \text{auf } \mathcal{F} \checkmark$$

2) Annahme: Medium idealer Leiter mit $\vec{K} \neq \vec{0}$ auf $\mathcal{F}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{H}_{1,t} - \vec{H}_{2,t} &= \frac{4\pi}{c}\vec{K} \times \vec{n}_{\mathcal{F}} \\ \vec{E}_{1,t} &= \vec{E}_{2,t} \end{aligned}}$$

Mit obiger Annahme für $\vec{S}$ im Medium folgt dann

$$\vec{S}_{1,n} = \frac{c}{4\pi}(\underset{\substack{\| \\ \vec{E}_{2,t}}}{\vec{E}_{1,t}} \times \underset{\substack{\nparallel \\ \vec{H}_{2,t}}}{\vec{H}_{1,t}})$$

gemäß Grenzbedingungen!

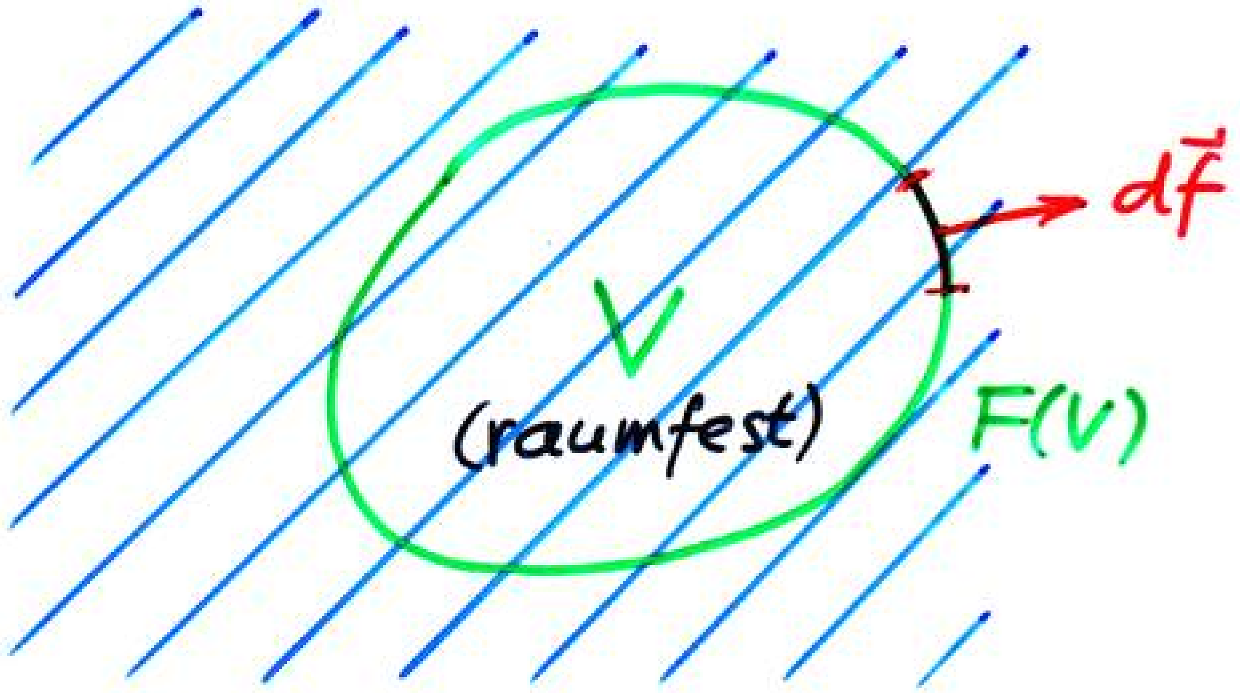
$$\neq \frac{c}{4\pi}(\vec{E}_{2,t} \times \vec{H}_{2,t}) \quad \text{auf } \mathcal{F}$$

Landau–Lifschitz:

$S_{1,n} - S_{2,n}$ gibt dann gerade die in der Flächeneinheit der Grenzfläche im Zusammenhang mit $\vec{K}$ pro Zeiteinheit als Joulesche Wärme dissipierte Energie an!

Energieerhaltungssatz in Materie.

? Elektromagnetische Energiedichte in Materie ?



Vorerst nur FG (keine MG) verwendet!

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H})$$

$$\oint_{F(V)} \vec{S}\cdot d\vec{f} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{S}\, d^3r = \int_V \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})\, d^3r$$

$$= \int_V \frac{c}{4\pi}\Big(\vec{H}\cdot\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{E}}_{-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} - \vec{E}\cdot\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{H}}_{\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}\Big)\, d^3r$$

$$= -\int_V \frac{1}{4\pi}\Big(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Big)\, d^3r$$

$$-\int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\, d^3r$$

ENERGIEERHALTUNGSSATZ (Interpretation?):

$$\underbrace{\oint_{F(V)} \vec{S}\cdot d\vec{f}}_{} + \underbrace{\int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\, d^3r}_{} = \underbrace{-\int_V \frac{1}{4\pi}\Big(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Big) d^3r}_{?}$$

in der Zeiteinheit netto aus F(V) ausströmende elm. Feldenergie

in der Zeiteinheit in V als Joulesche Wärme dissipierte Energie

?

Läßt sich i.a. nicht als Zeitableitung eines Volumsintegrals schreiben!

MG

Einfache Verhältnisse liegen nur vor, wenn

1) die einfachen MG

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D}(\vec{r},t) &= \varepsilon \vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{H}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\mu}\vec{B}(\vec{r},t)\end{aligned}}$$

gelten und

2) das Medium auf konstanter Temperatur gehalten wird (Abfuhr der Jouleschen Wärme)
($\Rightarrow \varepsilon, \mu$ zeitlich konstant)

1), 2) $\Longrightarrow$

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\vec{E}) + \vec{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mu\vec{H})$$

$$= \varepsilon \underbrace{\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^2} + \mu \underbrace{\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2\right)$$

ENERGIEERHALTUNGSSATZ

$$\boxed{\oint_{F(V)} \vec{S}\cdot d\vec{f} + \int_V \underbrace{\vec{j}\cdot\vec{E}}_{q}\, d^3r = -\frac{d}{dt}\int_V \underbrace{\frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2\right)}_{u_{elm}} d^3r}$$

$\mu\vec{H}^2 = \frac{1}{\mu}\vec{B}^2$

s. früher

Joulesche Wärme = leistungsdichte

elm. Energiedichte

INTERPRETATION!

Mit der weiteren MG $\vec{j}(\vec{r},t) = \sigma \vec{E}(\vec{r},t)$

folgt weiter

$$q(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r},t) \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\vec{j}^2(\vec{r},t)}{\sigma} = \sigma \vec{E}^2(\vec{r},t)$$

Beachte:

$$\boxed{\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t)\right]}$$

gilt für beliebige Materie,

$$\boxed{\begin{aligned} u_{elm}(\vec{r},t) &= \frac{1}{8\pi}\left[\varepsilon \vec{E}^2(\vec{r},t) + \mu \vec{H}^2(\vec{r},t)\right] \\ &= \frac{1}{8\pi}\left[\varepsilon \vec{E}^2(\vec{r},t) + \frac{1}{\mu} \vec{B}^2(\vec{r},t)\right] \end{aligned}}$$

gilt nur unter den VS 1), 2) von "oben".