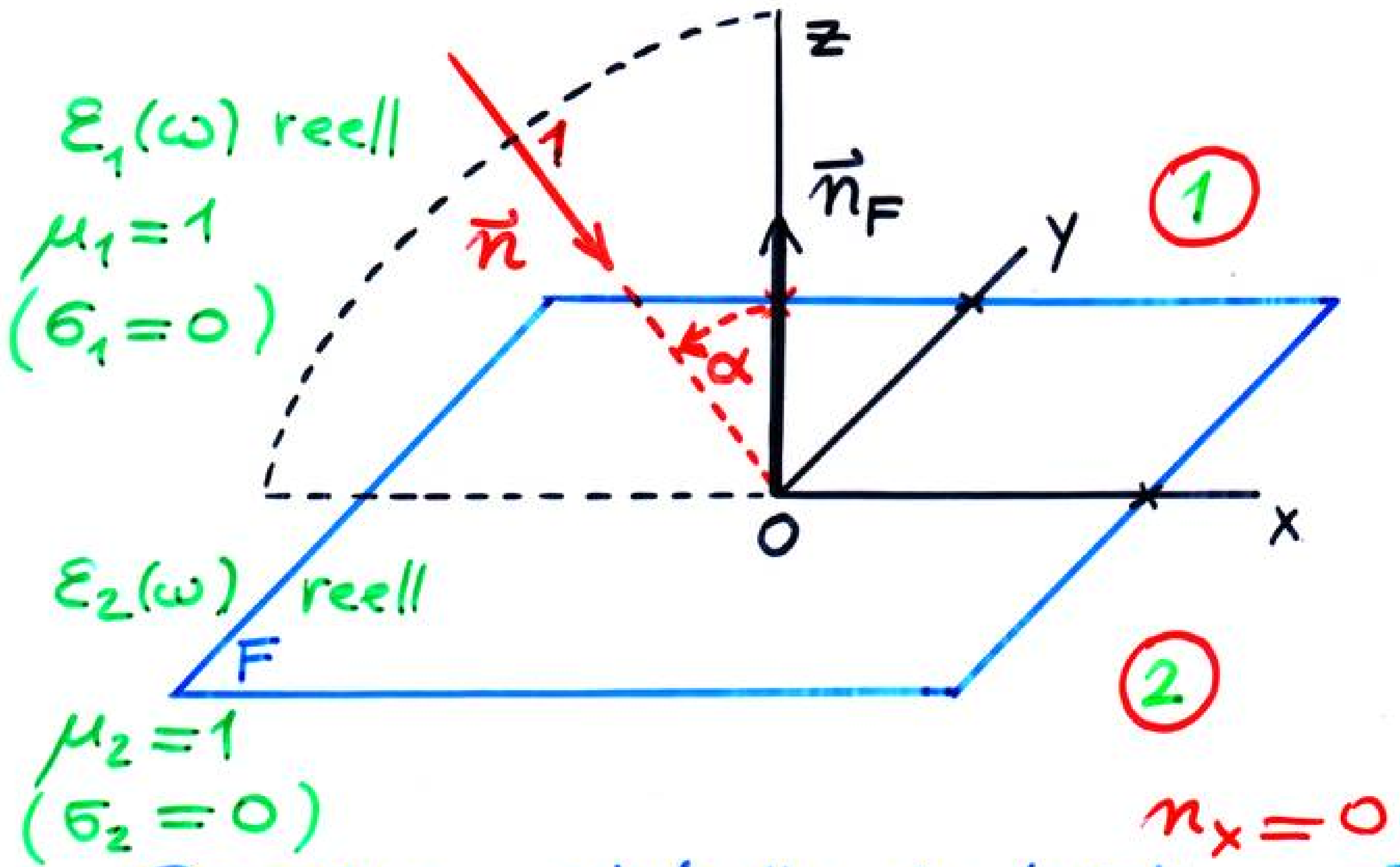
Reflexion und Brechung (bzw. Totalreflexion) einer monochromatischen ebenen Welle an einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei transparenten Medien



$\vec{n}_F = \vec{e}_z = (0,0,1)$

$\vec{n}$ vorgegeben

$\vec{n} = (\sin\alpha, 0, -\cos\alpha)$

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$

(d.h. $n_x > 0$)

$n_x = 0$ Sonderfall!

Gegeben: einfallende Welle = ebene Welle

mit gegebener Kreisfrequenz ω,
gegebener Ausbreitungsrichtung $\vec{n}$
und gegebenem komplexen Amplituden-
vektor $\vec{a}$ (d.h. mit gegebener Intensität
und gegebenem Polarisationszustand)

$$\vec{E}_c^{(einf)}(\vec{r},t) = \vec{a}\, e^{i[\vec{k}(\omega)\cdot\vec{r} - \omega t]}$$

! komplexe Schreibweise (FG+MG+GB linear!)

$$\vec{D}_c^{(einf)}(\vec{r},t) = \varepsilon_1(\omega)\, \vec{E}_c^{(einf)}(\vec{r},t)$$

$$\vec{B}_c^{(einf)}(\vec{r},t) = \vec{n} \times \sqrt{\varepsilon_1(\omega)}\, \vec{E}_c^{(einf)}(\vec{r},t) = \vec{H}_c^{(einf)}(\vec{r},t)$$

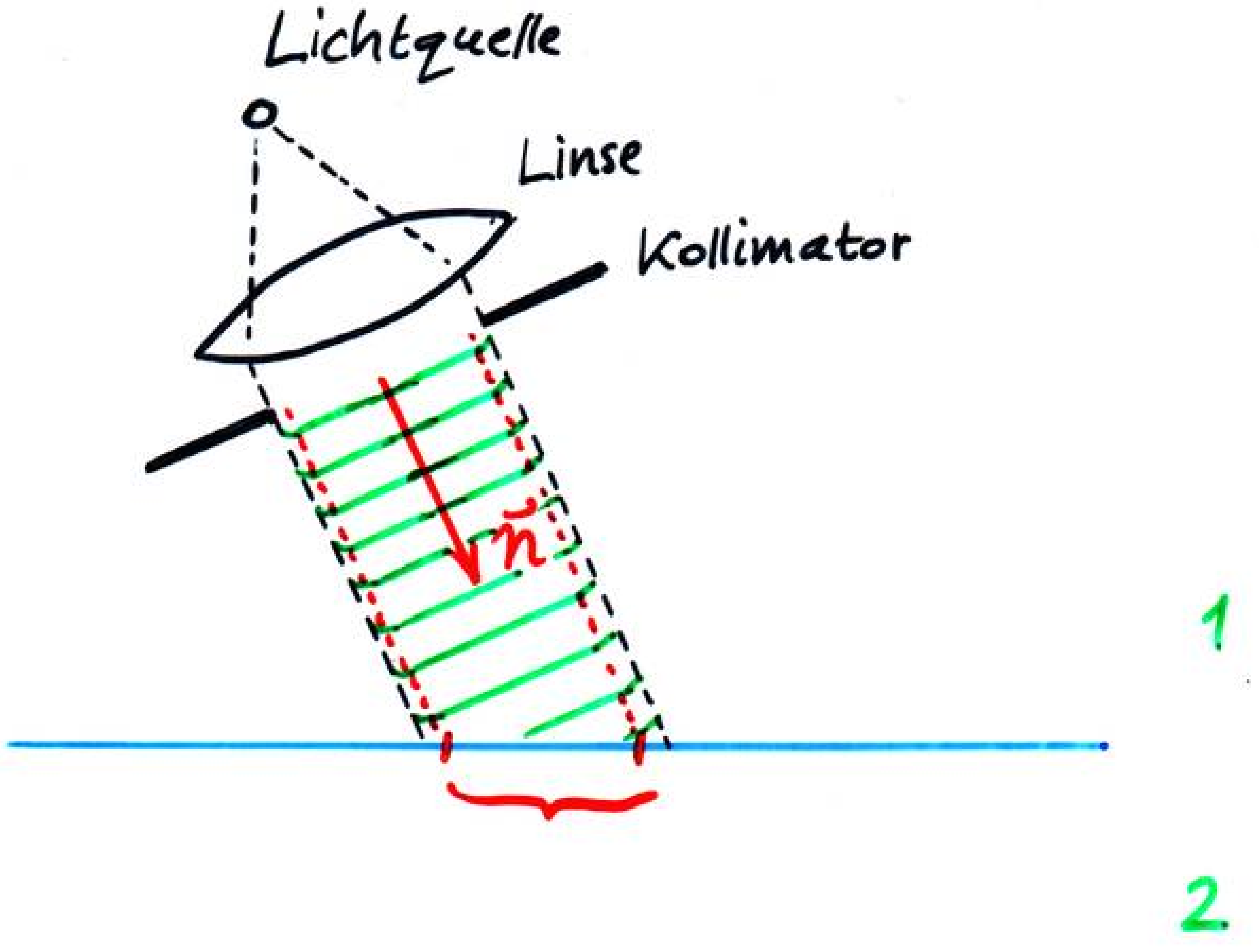
$$\vec{k}(\omega) = \sqrt{\varepsilon_1(\omega)}\, \frac{\omega}{c}\, \vec{n}$$

Skriptum: $\vec{\varepsilon}_\alpha$

$$\vec{a} = \sum_{\alpha=1,2} \vec{a}_\alpha = \sum_{\alpha=1,2} \vec{e}_\alpha E_{0\alpha} e^{i\delta_\alpha}$$

$\varepsilon_1(\omega) = \mathrm{Re}\, \varepsilon_1(\omega)$, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$ orthonormiert

Experiment:
"Strahl"



Gesucht: Gesamtfelder im Medium 1 und im Medium 2

Ansatz für die Lösung $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_2(\omega)$

Medium 1:

$$\vec{E}_{c1}(\vec{r},t) = \underbrace{\vec{a}\, e^{i[\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c}\vec{n}\cdot\vec{r}-\omega t]}}_{\vec{E}_c^{(einf)}(\vec{r},t)} + \underbrace{\vec{a}'\, e^{i[\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c}\vec{n}'\cdot\vec{r}-\omega t]}}_{=:\,\vec{E}_c^{(refl)}(\vec{r},t)}$$

$\omega, \vec{n}, \vec{a}$ vorgegeben

($\vec{n}$ reeller Einheitsvektor,
$\vec{a}$ komplexer Vektor mit $\vec{a}\cdot\vec{n} = 0$)

$\vec{n}', \vec{a}'$ gesucht

($\vec{n}', \vec{a}'$ komplexe Vektoren mit
$\vec{n}'^2 = 1$, $\vec{a}'\cdot\vec{n}' = 0$)

$$\vec{D}_{c1}(\vec{r},t) = \varepsilon_1 \vec{E}_{c1}(\vec{r},t) = \underbrace{\varepsilon_1 \vec{E}_c^{(einf)}(\vec{r},t)}_{\vec{D}_c^{(einf)}(\vec{r},t)} + \underbrace{\varepsilon_1 \vec{E}_c^{(refl)}(\vec{r},t)}_{\vec{D}_c^{(refl)}(\vec{r},t)}$$

$$\vec{H}_{c1}(\vec{r},t) = \vec{B}_{c1}(\vec{r},t) = \underbrace{\vec{n}\times\sqrt{\varepsilon_1}\,\vec{E}_c^{(einf)}(\vec{r},t)}_{\vec{B}_c^{(einf)}(\vec{r},t)} + \underbrace{\vec{n}'\times\sqrt{\varepsilon_1}\,\vec{E}_c^{(refl)}(\vec{r},t)}_{\vec{B}_c^{(refl)}(\vec{r},t)}$$

Medium 2:

$$\vec{E}_{c2}(\vec{r},t) = \vec{a}'' e^{i[\sqrt{\varepsilon_2}\frac{\omega}{c}\vec{n}''\cdot\vec{r} - \omega t]}$$

$\vec{n}'', \vec{a}''$ gesucht

($\vec{n}'', \vec{a}''$ komplexe Vektoren mit

$\vec{n}''^2 = 1$, $\vec{a}''\cdot\vec{n}'' = 0$)

$$\vec{D}_{c2}(\vec{r},t) = \varepsilon_2 \vec{E}_{c2}(\vec{r},t) \;, \quad \vec{B}_{c2}(\vec{r},t) = \vec{n}'' \times \sqrt{\varepsilon_2}\,\vec{E}_{c2}(\vec{r},t)$$

$$\vec{B}_{c2}(\vec{r},t) = \vec{H}_{c2}(\vec{r},t)$$

Der Ansatz erfüllt die Feld- und Materialgln. im Medium 1 und im Medium 2,

wofern nur die noch verfügbaren komplexen Parameter $\vec{n}', \vec{a}'$, $\vec{n}'', \vec{a}''$ die Bedingungen

$$\vec{n}'^2 = 1 \,,\; \vec{a}'\cdot\vec{n}' = 0 \;;\; \vec{n}''^2 = 1 \,,\; \vec{a}''\cdot\vec{n}'' = 0$$

erfüllen.

Grenzbedingungen = Stetigkeitsbedingungen:

(keine Flächenquellen bei $z = 0$)

$$D_{c1,z} = D_{c2,z} \qquad B_{c1,z} = B_{c2,z}$$

$$E_{c1,x} = E_{c2,x} \qquad B_{c1,x} = B_{c2,x}$$

$$E_{c1,y} = E_{c2,y} \qquad B_{c1,y} = B_{c2,y}$$

~~$\forall\, x,y,t$~~ ~~$z = 0$~~ $\qquad \forall\, x,y$ $\quad z = t = 0$

Wahl des KS! ($n_y=0$)

Jede der 6 Stetigkeitsbedingungen besitzt die Form

$$A e^{i\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c}\overbrace{n_x x}^{\vec{n}\cdot\vec{r} \text{ für } z=0}} + B e^{i\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c}\overbrace{(n'_x x + n'_y y)}^{\vec{n}'\cdot\vec{r} \text{ für } z=0}}$$

$$= C e^{i\sqrt{\varepsilon_2}\frac{\omega}{c}\underbrace{(n''_x x + n''_y y)}_{\vec{n}''\cdot\vec{r} \text{ für } z=0}} \quad , \quad \forall x,y$$

mit $A, B, C \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ notwendig (nicht hinreichend) für die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen ist

i) $n'_y = n''_y = 0 \quad (= n_y)$ — n'_y, n''_y also reell

ii) $n'_x = n_x$ — n'_x also reell

iii) $n''_x = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}_{>0}\, \overset{<1}{n_x} \gtreqless 1$! — n''_x also reell

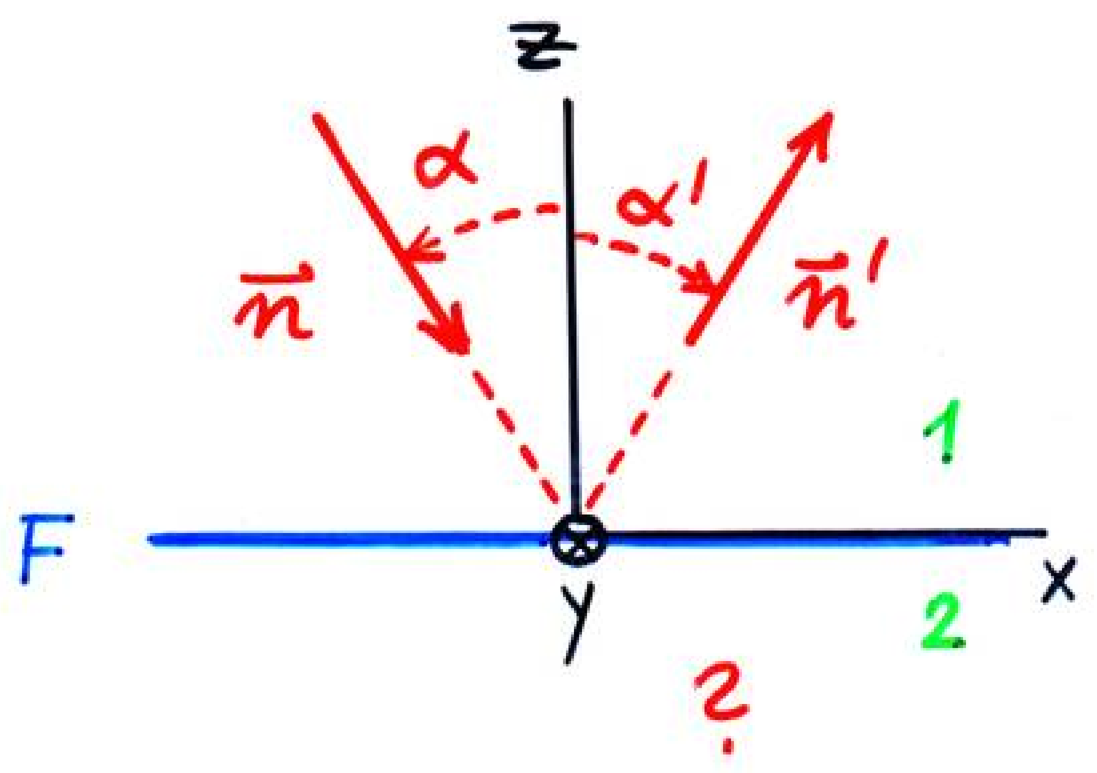
$\vec{n}'$:

i), ii) $\Rightarrow 1 = \cancel{n_x^2} + \underset{\substack{\| \\ 0}}{n_y^2} + n_z^2 = \underset{\substack{\| \\ \cancel{n_x^2}}}{n'^2_x} + \underset{\substack{\| \\ 0}}{n'^2_y} + n'^2_z$

$\Rightarrow n'^2_z = n_z^2 \quad , \quad n'_z = \pm n_z$ reell

$$\boxed{\vec{n}' = (n'_x, n'_y, n'_z) = (n_x, 0, -n_z)}$$ reell!

Reflexionsgesetz



$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$

$\vec{n} = (\sin\alpha, 0, -\cos\alpha)$

$\vec{n}' = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$

$\vec{n}'$ damit bestimmt!

Die reflektierte Welle ist eine ebene Welle, ihre Ausbreitungsrichtung liegt in der Einfallsebene (Ebene von $\vec{n}$ und $\vec{n}_F$), der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel:

$$\alpha' = \alpha$$

$\vec{n}''$:

reell: n''_x $\qquad n''^2_x + n''^2_z = 1$!

Fall (a) ("Normalfall"): $\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}\ \underbrace{n_x} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin\alpha \leq 1 \qquad (*)$

$\Downarrow$ n''_z ebenfalls reell

Später: Reflexion und Brechung (Transmission)

$0 \leq n_x < 1$

(1) $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} < 1$ falls Medium 2 "optisch dichter", d.h. falls $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ gilt

(2) $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} > 1$ falls Medium 2 "optisch dünner", d.h. falls $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ gilt

(3) Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ "uninteressant" (warum?)

(1): $(*)$ für beliebige n_x (beliebige α) erfüllt

(2): $(*)$ nur für solche n_x (solche α) erfüllt, für die

$$\alpha \leq \alpha_T = \arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \alpha_T(\omega) \text{ gilt}$$

zu (2): $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, $\alpha \le \alpha_T = \arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}_{>1}\,\underbrace{\overbrace{\sin\alpha}^{n_x}}_{<1} \le \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\,\underbrace{\sin\alpha_T}_{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}} = 1 \quad ✓$$

Unter der VS $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, n_x \le 1$ (Fall (a) ("Normalfall")

"gleich": Reflexion und Brechung (Transmission)

folgt aus

iii) $n''_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, n_x \le 1$

und aus

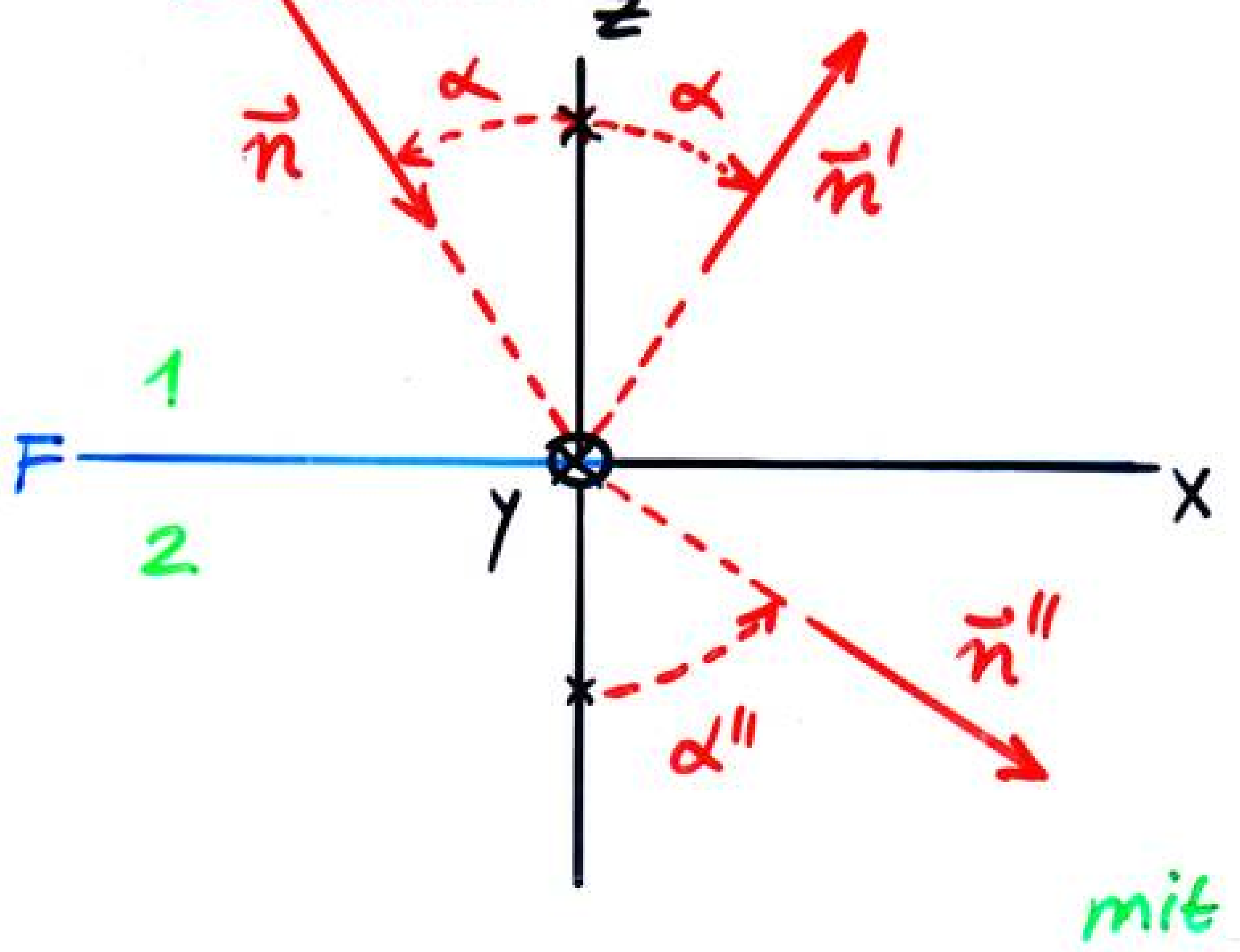
$$1 = \underbrace{n''^2_x}_{\le 1} + \underbrace{n''^2_y}_{=0} + \underbrace{n''^2_z}_{\ge 0} \Rightarrow n''_z \text{ reell}$$

$$n''_z = (\pm)\sqrt{1 - n''^2_x} = (\pm)\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2}$$

$$\boxed{\vec{n}'' = (n''_x, n''_y, n''_z) = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, n_x,\ 0,\ -\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2}\right)}$$

$\vec{n}''$ damit im Fall (a) bestimmt!

im Fall (a)



$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$

Brechungsgesetz (im engeren Sinne)

$$\vec{n} = (\sin\alpha, 0, -\cos\alpha)$$

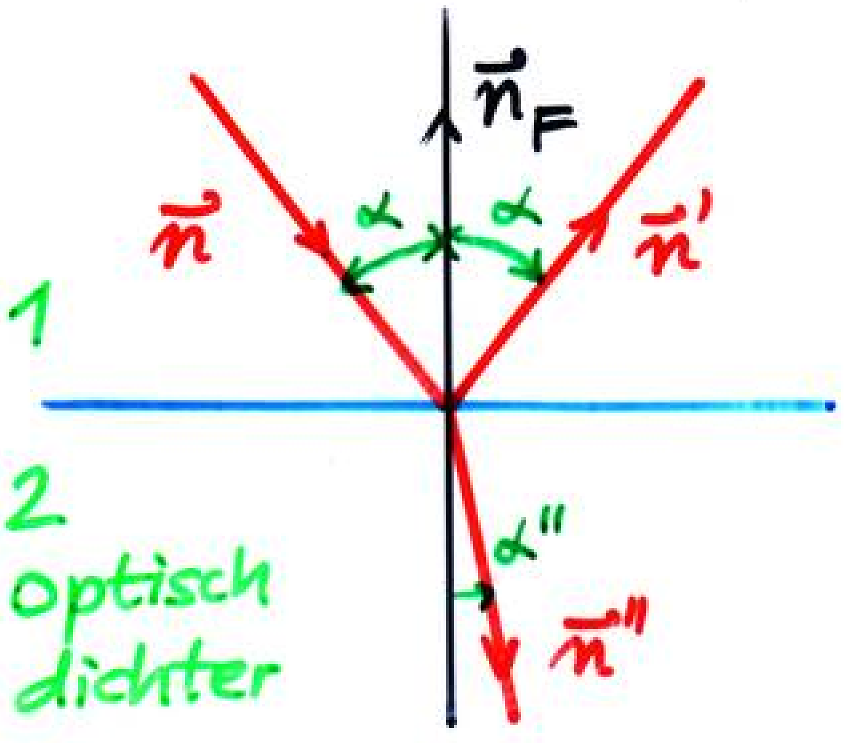
$$\vec{n}' = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$$

$$\vec{n}'' = (\sin\alpha'', 0, -\cos\alpha'')$$

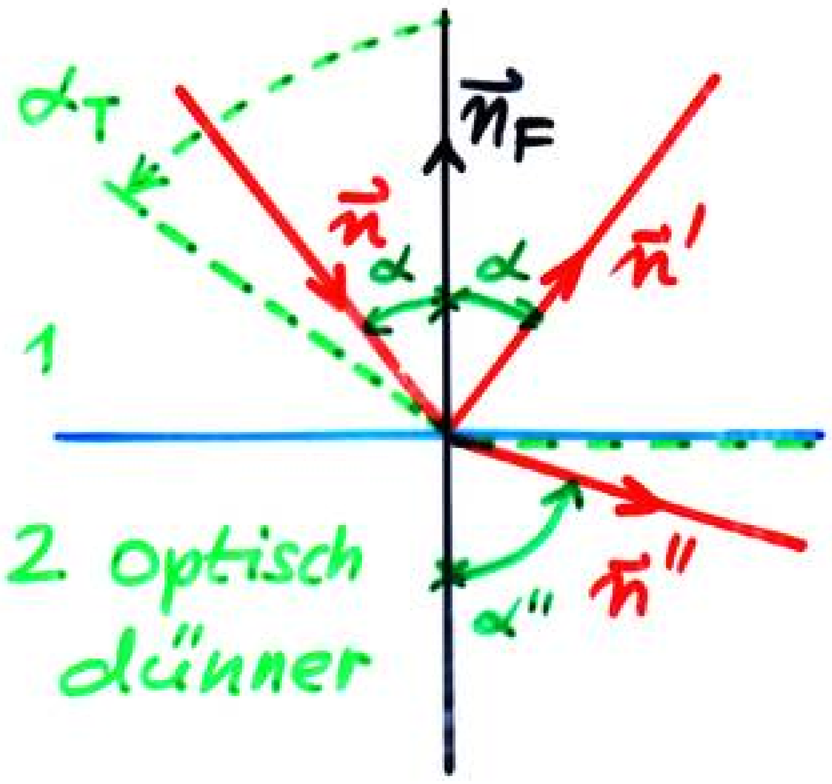
mit $\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} =: n_{12}} = \frac{n_2}{n_1}$

ω

$\sin\alpha_T = n_{12} < 1$



$\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \quad (n_{12} > 1)$



$\varepsilon_2 < \varepsilon_1 \quad (n_{12} < 1)$

$\alpha \uparrow \alpha_T$:
$\alpha'' \uparrow \frac{\pi}{2}$

Ist das Medium 2 optisch dichter [optisch dünner und der Einfallswinkel α kleiner oder gleich dem Grenzwinkel $\alpha_T = \arcsin n_{12}$], so erfolgt Lichtbrechung (Transmission). Die Welle im Medium 2 ist eine ebene Welle, ihre Ausbreitungsrichtung $\vec{n}''$ liegt in der Einfallsebene (Ebene von $\vec{n}$ und $\vec{n}_F$), die Brechung erfolgt zum Lot [vom Lot] und der Brechungswinkel α'' ist durch

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''} = n_{12} \qquad \text{... Brechungsgesetz (im engeren Sinne)}$$

gegeben.

Fall (a)

Fall (b) ("Sonderfall"): $\overbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, n_x}^{n''_x} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin\alpha > 1$

Später: Totalreflexion

Tritt ein, falls $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ und $\alpha > \alpha_T = \arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, \sin\alpha > \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, \underbrace{\sin\alpha_T}_{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}} = 1 \quad ✓$$

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$!

i) $n''_y = 0$

iii) $n''_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, n_x > 1$

$$1 = \underbrace{n''^2_x}_{>1} + \underbrace{n''^2_y}_{0} + \underbrace{n''^2_z}_{<0} \Rightarrow n''^2_z = -(\overbrace{n''^2_x}^{>1} - 1)$$

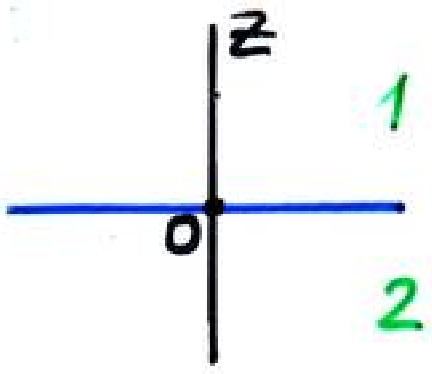
$\Rightarrow n''_z$ imaginär

Welle im Medium 2 = inhomogene Welle!

$$n''_z = (\pm)\, i \sqrt{n''^2_x - 1} = (\pm)\, i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2 - 1}$$

Interpretation von $\vec{E}_{c2}(\vec{r},t)$?

$$\vec{E}_{c2}(\vec{r},t) = \vec{a}''\, e^{i[\sqrt{\varepsilon_2}\frac{\omega}{c}\vec{n}''\cdot\vec{r} - \omega t]}$$



$$\vec{n}''\cdot\vec{r} = n''_x x + n''_z z = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, n_x x \,(\pm)\, i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2 - 1}\; \underbrace{z}_{-|z|}$$

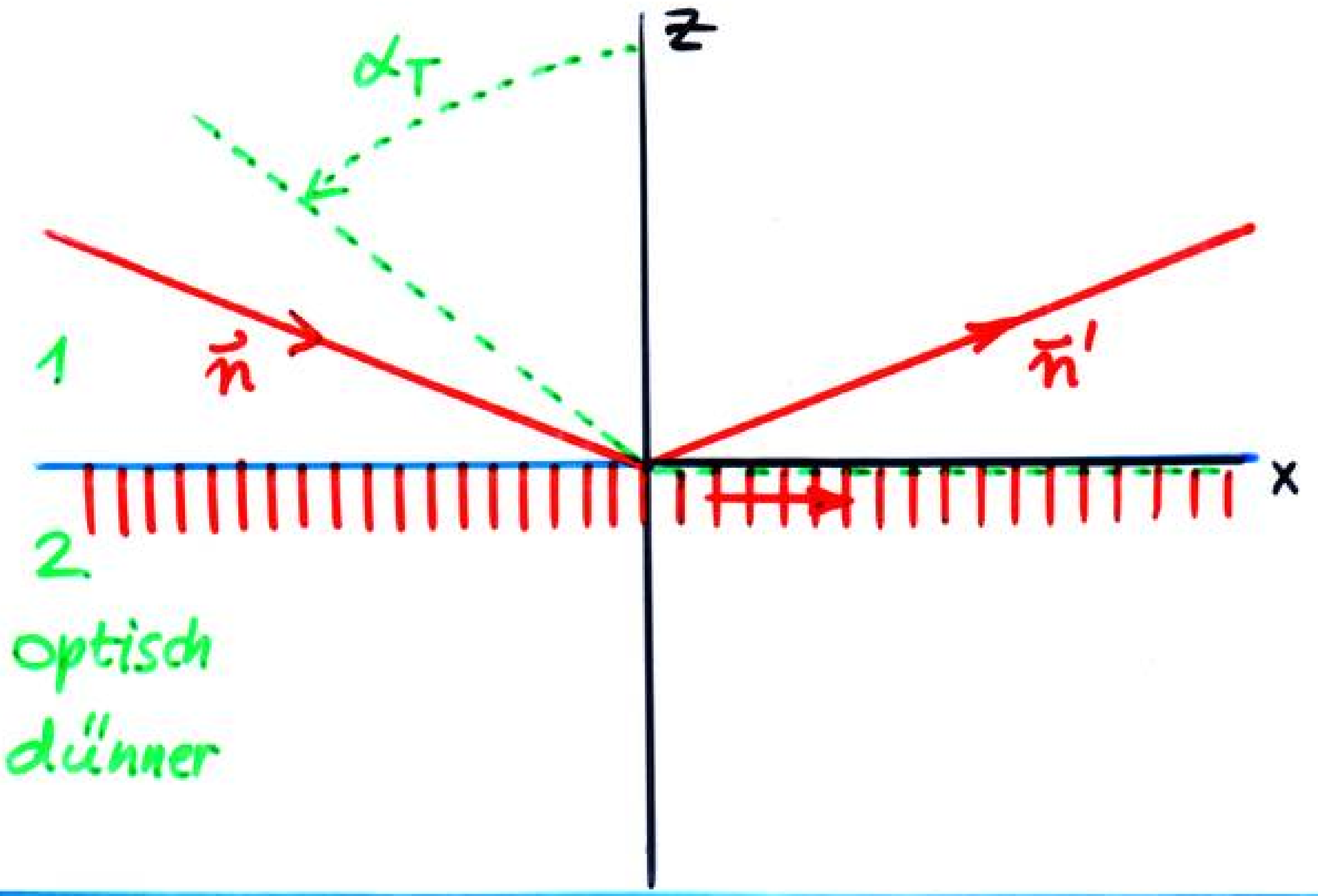
$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, n_x x \overset{(-)}{+} i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2 - 1}\; |z|$$

$$i[\sqrt{\varepsilon_2}\frac{\omega}{c}\vec{n}''\cdot\vec{r} - \omega t] = i[\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c} n_x x - \omega t]$$

$$\overset{(+)}{-} \sqrt{\varepsilon_1 n_x^2 - \varepsilon_2}\, \frac{\omega}{c} |z|$$

$$\vec{E}_{c2}(\vec{r},t) = \vec{a}''\, e^{(\pm)\sqrt{\varepsilon_1 n_x^2-\varepsilon_2}\,\frac{\omega}{c}|z|}\cdot e^{i\left(\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c}n_x x-\omega t\right)}$$

in x-Richtung fortschreitende, in negativer z-Richtung mit $|z|$ exponentiell abklingende inhomogene Welle ("Lichthaut")



"TOTALREFLEXION"
(s. später)

Ist das Medium 2 optisch dünner und der Einfallswinkel α größer als der Grenzwinkel $\alpha_T = \arcsin n_{12}$ so erfolgt Totalreflexion.*) Die Welle im Medium 2 ist eine in x-Richtung fortschreitende, in negativer z-Richtung mit $|z|$ exponentiell abklingende inhomogene Welle ("Lichthaut").

Fall (b)

$$\boxed{\vec{n}'' = (n_x'', n_y'', n_z'') = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\,n_x\,,\,0\,,\,-i\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}n_x^2-1}\right)}$$

*) s. später: Keine Transmission!

Rekapitulation:

Im Ansatz enthaltene noch festzulegende Größen:

$$\boxed{\vec{a}',\ \vec{n}',\ \vec{a}'',\ \vec{n}''}$$ (4 komplexe konstante Vektoren)

Bedingungen für diese Größen:

1) $\vec{n}'^2 = 1$, $\vec{n}''^2 = 1$

2) $\vec{a}' \cdot \vec{n}' = 0$, $\vec{a}'' \cdot \vec{n}'' = 0$

3) 6 Stetigkeitsbedingungen $\forall x, y$ $(z=0, t=0)$

Aus 1) und Forderung, daß 3) $\forall x, y$ gilt, wofern 3) für $x=y=0$ gilt: notwendig ist

$\vec{n}' = (n_x, 0, -n_z)$ Reflexionsgesetz ("universell")

$\vec{n}'' = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, n_x, 0, -\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2}\right)$ im Fall (a): Brechungsgesetz

$\vec{n}'' = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, n_x, 0, -i\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2 - 1}\right)$ im Fall (b): Totalreflexion

$\boxed{\text{Damit } \vec{n}', \vec{n}'' \text{ festgelegt.}}$

Noch festzulegende Größen:

$\boxed{\vec{a}', \vec{a}''}$ (2 komplexe konstante Vektoren)

Bedingungen für diese Größen:

2) $\vec{a}' \cdot \vec{n}' = 0$, $\vec{a}'' \cdot \vec{n}'' = 0$ ($\vec{n}', \vec{n}''$ bereits bekannt)

3) 6 Stetigkeitsbedingungen für $x = y = 0$ $(z=0, t=0)$
($\vec{n}', \vec{n}''$ bereits bekannt)

2) + 3) sind 8 lineare komplexe Gleichungen
für 6 komplexe Größen (Unbekannte)

FRAGE: Widerspruch oder $\vec{a}', \vec{a}''$ eindeutig bestimmbar?

Weitere Rechnung (Bestimmung von $\vec{a}', \vec{a}''$):

Fallunterscheidung — Fall (a), Fall (b) — durch mathem. "Trick" vermeidbar!

$\sin\xi$, $\cos\xi$ sind analyt. Fktn. im Komplexen

($\Rightarrow$ alle Beziehungen, welche im Reellen gelten, gelten auch im Komplexen, etwa $\sin^2\xi + \cos^2\xi = 1$ oder die Additionstheoreme etc.)

Deshalb kann man formal auch im Fall (b)

$$\vec{n}'' = (n_x'', n_y'', n_z'') = (\sin\alpha'', 0, -\cos\alpha'')$$

setzen. Damit ist $\vec{n}''^2 = n_x''^2 + n_y''^2 + n_z''^2 = 1$ "automatisch" gewährleistet.

Fall (a):

$$n_x'' = \underline{\underline{\sin\alpha''}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, n_x = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin\alpha}} \leq 1$$

Brechungsgesetz (im engeren Sinn)

α'' reell (besitzt anschauliche Bedeutung: Brechungswinkel)

$$n_z'' = -\cos\alpha'' = -\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2} = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha''}$$

reell

$$\underline{\cos\alpha'' = +\sqrt{1 - \underbrace{\sin^2\alpha''}_{\leq 1}}}$$

Fall (b):

$$n_x'' = \sin\alpha'' = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, n_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin\alpha > 1$$

"Brechungsgesetz"

α'' komplex (keine anschauliche Bedeutung)

$$n_z'' = -\cos\alpha'' = -i\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2 - 1} = -i\sqrt{\sin^2\alpha'' - 1}$$

imaginär

$$\cos\alpha'' = +i\sqrt{\underbrace{\sin^2\alpha''}_{>1} - 1}$$

"Rezept" bei weiterer Rechnung:

$$\vec{n} = (\sin\alpha, 0, -\cos\alpha)$$

$$\vec{n}' = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$$

$$\vec{n}'' = (\sin\alpha'', 0, -\cos\alpha'')$$

$$n_x'' = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\, n_x$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$ (Brechungsgesetz im weiteren Sinn)

für Fall (a) und Fall (b) verwenden, aber bis zum Ende der Rechnungen $\cos\alpha''$ "drinnenlassen" und erst in den Ergebnissen einmal $\cos\alpha'' = +\sqrt{1-\sin^2\alpha''}$ (Fall (a)) und einmal $\cos\alpha'' = +i\sqrt{\sin^2\alpha'' - 1}$ (Fall (b)) setzen.

Rekapitulation 1

Notwendige (nicht hinreichende) Bedingungen
für die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen sind:

Bei gegebenem

$$\vec{n} = (\sin\alpha, 0, -\cos\alpha) \quad , \quad \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2})$$

muß

$$\vec{n}' = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$$

$$\vec{n}'' = (\sin\alpha'', 0, -\cos\alpha'')$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} =: n_{12}$$

und

$$\cos\alpha'' = +\sqrt{1-\sin^2\alpha''} \quad \text{im Fall (a): } \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\alpha \le 1$$

$$\cos\alpha'' = +i\sqrt{\sin^2\alpha'' - 1} \quad \text{im Fall (b): } \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\alpha > 1$$

gelten.

Damit sind die im Ansatz ursprünglich freien Parameter

$\vec{n}'$, $\vec{n}''$ bereits festgelegt

und nur mehr die Parameter

$\vec{a}'$, $\vec{a}''$ sind noch nicht ganz festgelegt
(Beachte: Es muß $\vec{a}' \cdot \vec{n}' = 0$, $\vec{a}'' \cdot \vec{n}'' = 0$
verlangt werden.)

Rekapitulation 2

Die Erfüllung der obigen notwendigen Bedingungen gewährleistet die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen für alle Punkte der Grenzfläche (d.h. $\forall x, y$), wofern sie im Ursprung (d.h. für $x = y = 0$) erfüllt sind.

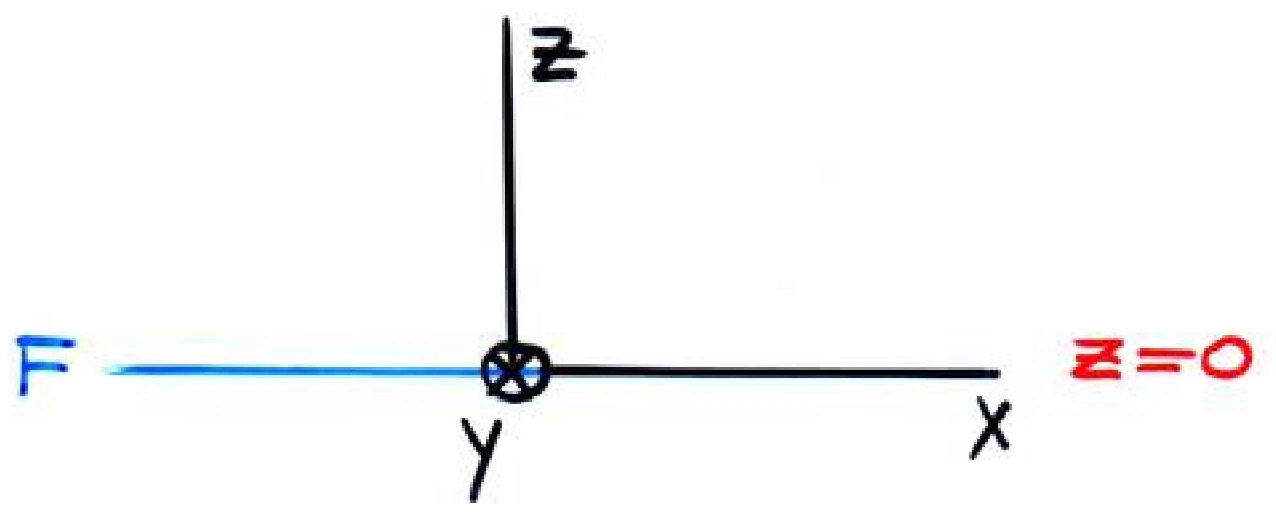
Was bleibt zu tun?
Wir müssen die Grenzbedingungen für $x = y = 0$ (und $t = 0$) anschreiben und dabei für $\vec{n}', \vec{n}''$ die Ausdrücke benützen, die von den notwendigen Bedingungen verlangt werden. Hierauf müssen wir zeigen, daß diese Gleichungen zusammen mit $\vec{a}' \cdot \vec{n}' = 0$ und $\vec{a}'' \cdot \vec{n}'' = 0$ widerspruchsfrei sind und die eindeutige Festlegung von $\vec{a}', \vec{a}''$ gestatten.

Rekapitulation 3

Was haben wir von der Maxwellschen elm. Lichttheorie für die Ableitung des Reflexions- und Brechungsgesetzes (im engeren Sinne) benötigt?
Elementare "Ableitungen" des Reflexions- und Brechungsgesetzes!

Aussagen über Polarisations- und Intensitätsverhältnisse aber nur in Mx-Theorie!

Grenzbedingungen für $x=y=0$ (und $t=0$)



$$\vec{E}_{c1}(\vec{0},0)=\vec{a}+\vec{a}\,'$$
$$\vec{E}_{c2}(\vec{0},0)=\vec{a}\,''$$

usf.!

$$D_{C1,z}=D_{C2,z} \quad , \quad B_{C1,z}=B_{C2,z}$$

$$E_{C1,x}=E_{C2,x} \quad , \quad B_{C1,x}=B_{C2,x}$$

$$E_{C1,y}=E_{C2,y} \quad , \quad B_{C1,y}=B_{C2,y}$$

$x=y=0$
$z=0$
$t=0$

$$\varepsilon_1(a_z+a_z')=\varepsilon_2 a_z''$$
$$\sqrt{\varepsilon_1}\left[(\vec{n}\times\vec{a})_z+(\vec{n}\,'\times\vec{a}\,')_z\right]=\sqrt{\varepsilon_2}(\vec{n}\,''\times\vec{a}\,'')_z$$
$$a_x+a_x'=a_x''$$
$$a_y+a_y'=a_y''$$
$$\sqrt{\varepsilon_1}\left[(\vec{n}\times\vec{a})_x+(\vec{n}\,'\times\vec{a}\,')_x\right]=\sqrt{\varepsilon_2}(\vec{n}\,''\times\vec{a}\,'')_x$$
$$\sqrt{\varepsilon_1}\left[(\vec{n}\times\vec{a})_y+(\vec{n}\,'\times\vec{a}\,')_y\right]=\sqrt{\varepsilon_2}(\vec{n}\,''\times\vec{a}\,'')_y$$

$\vec{n}\,', \vec{n}\,''$ aus notwendigen Bedingungen

Insgesamt 8 komplexe lineare Gln. für 6 komplexe Unbekannte!

<u>Nebenbedingungen</u>

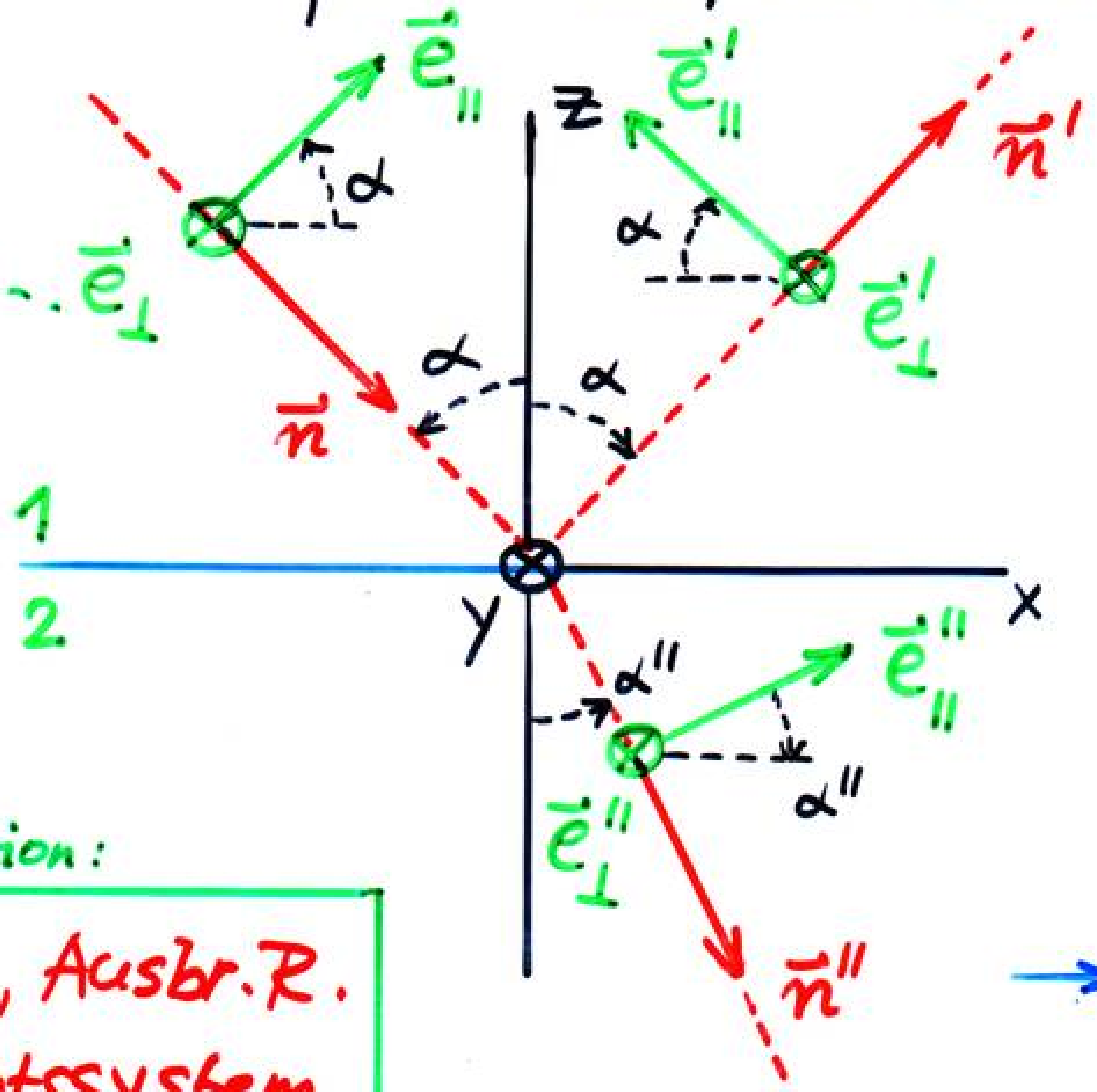
$$\vec{a}\,'\cdot\vec{n}\,'=0 \quad , \quad \vec{a}\,''\cdot\vec{n}\,''=0$$

kommen zu Stetigkeitsbedingungen dazu.

Fall (a): Wahl der Polarisationsvektoren

("automatischer Einbau" der NB $\underline{\vec{a}'\cdot\vec{n}'=0}$, $\underline{\vec{a}''\cdot\vec{n}''=0}$ $\Rightarrow$ nur mehr 6 komplexe Gln. für 4 komplexe Unbekannte)

Skriptum $\vec{E}_\perp$ usf.



Konvention:

$\boxed{\perp,\ \parallel,\ \text{Ausbr.R.}\ \ \text{Rechtssystem}}$

$$\vec{e}_1=\vec{e}_\perp=(0,1,0)=\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_2=\vec{e}_\parallel=(\cos\alpha,0,\sin\alpha)$$
$$\vec{e}\,'_1=\vec{e}\,'_\perp=(0,1,0)=\vec{e}_y$$
$$\vec{e}\,'_2=\vec{e}\,'_\parallel=(-\cos\alpha,0,\sin\alpha)$$
$$\rightarrow\ \vec{e}\,''_1=\vec{e}\,''_\perp=(0,1,0)=\vec{e}_y$$
$$\rightarrow\ \vec{e}\,''_2=\vec{e}\,''_\parallel=(\cos\alpha'',0,\sin\alpha'')$$

$\Rightarrow$

$$\vec{a}=a_\perp\vec{e}_\perp+a_\parallel\vec{e}_\parallel=(a_\parallel\cos\alpha,\ a_\perp,\ a_\parallel\sin\alpha)$$

$$\vec{a}\,'=\underline{\underline{a'_\perp}}\,\vec{e}\,'_\perp+\underline{\underline{a'_\parallel}}\,\vec{e}\,'_\parallel=(-a'_\parallel\cos\alpha,\ a'_\perp,\ a'_\parallel\sin\alpha)$$

$$\rightarrow\ \vec{a}\,''=\underline{\underline{a''_\perp}}\,\vec{e}\,''_\perp+\underline{\underline{a''_\parallel}}\,\vec{e}\,''_\parallel=(a''_\parallel\cos\alpha'',\ a''_\perp,\ a''_\parallel\sin\alpha'')$$

4 Unbekannte

Fall (b): Wahl der Polarisationsvektoren im Medium 1 wie im Fall (a)

$\vec{n}''=(\sin\alpha'',0,-\cos\alpha'')$

Zeichnung in obiger Abbildung im Medium 2 "obsolet", aber formal wieder $\longrightarrow$ definiert (keine anschauliche Bedeutung der komplexen Größen α'', $\vec{e}\,''_\parallel$, aber $\vec{a}\,''\cdot\vec{n}''=0$ gewährleistet)

Einsetzen der Ausdrücke $\vec{n}, \vec{n}', \vec{n}''$ sowie $\vec{a}, \vec{a}', \vec{a}''$ in die noch zu erfüllenden Stetigkeitsbedingungen liefert ($\cos\alpha''$ systematisch "beibehalten", d.h. nirgends durch $\sin\alpha''$ ausgedrückt, damit alle Beziehungen für Fall (a) und Fall (b) gültig!): Brechungsgesetz (im allg. Sinn) plus:

$$\overbrace{\varepsilon_1}^{\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_1}} (a_{\parallel} + a'_{\parallel}) \sin\alpha = \overbrace{\varepsilon_2}^{\sqrt{\varepsilon_2}\sqrt{\varepsilon_2}} a''_{\parallel} \sin\alpha'' \qquad D_z$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} (a_{\perp} + a'_{\perp}) \sin\alpha = \sqrt{\varepsilon_2}\, a''_{\perp} \sin\alpha'' \qquad B_z$$

$$(a_{\parallel} - a'_{\parallel}) \cos\alpha = a''_{\parallel} \cos\alpha'' \qquad E_x$$

$$a_{\perp} + a'_{\perp} = a''_{\perp} \qquad E_y$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} (a_{\perp} - a'_{\perp}) \cos\alpha = \sqrt{\varepsilon_2}\, a''_{\perp} \cos\alpha'' \qquad B_x$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} (a_{\parallel} + a'_{\parallel}) = \sqrt{\varepsilon_2}\, a''_{\parallel} \qquad B_y$$

Es bleiben 4 lineare inhomogene komplexe Gln. für die 4 komplexen Unbekannten $a'_{\perp}, a'_{\parallel}, a''_{\perp}, a''_{\parallel}$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung $\exists$

$n_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

LÖSUNG: Fresnelsche Formeln

$$\boxed{\begin{aligned}
a'_{\parallel} &= a_{\parallel}\,\frac{\tan(\alpha-\alpha'')}{\tan(\alpha+\alpha'')} = a_{\parallel}\,\frac{n_{12}\cos\alpha-\cos\alpha''}{n_{12}\cos\alpha+\cos\alpha''}\\
a'_{\perp} &= -a_{\perp}\,\frac{\sin(\alpha-\alpha'')}{\sin(\alpha+\alpha'')} = a_{\perp}\,\frac{\cos\alpha-n_{12}\cos\alpha''}{\cos\alpha+n_{12}\cos\alpha''}\\
a''_{\parallel} &= a_{\parallel}\,\frac{2\sin\alpha''\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha'')\cos(\alpha-\alpha'')} = a_{\parallel}\,\frac{2\cos\alpha}{n_{12}\cos\alpha+\cos\alpha''}\\
a''_{\perp} &= a_{\perp}\,\frac{2\sin\alpha''\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha'')} = a_{\perp}\,\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha+n_{12}\cos\alpha''}
\end{aligned}}$$

Die Fresnelschen Formeln bilden zusammen mit dem

Reflexionsgesetz $\quad \vec{n}' = (\sin\alpha,\, 0,\, \cos\alpha)$

und dem

Brechungsgesetz (im weiteren Sinn) $\quad \vec{n}'' = (\sin\alpha'',\, 0,\, -\cos\alpha'')$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''} = n_{12} := \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}$$

Fall (a): $\sin\alpha \le n_{12}$: (d.h. $\sin\alpha'' \le 1$) $\quad \cos\alpha'' = +\sqrt{1-\sin^2\alpha''}$

Fall (b): $\sin\alpha > n_{12}$: (d.h. $\sin\alpha'' > 1$) $\quad \cos\alpha'' = +i\sqrt{\sin^2\alpha''-1}$

einen Satz von notwendigen und hinreichenden Bdgn.

für die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen.

Polarisations- und Intensitätsverhältnisse im Fall (a) (d.h. wenn nicht Totalreflexion vorliegt)

VS: Entweder $n_{12} > 1$ (Medium 2 optisch dichter)

oder $n_{12} < 1$ (Medium 2 optisch dünner)

und $\alpha \leq \alpha_T = \arcsin n_{12}$; $n_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

ω !

$\Rightarrow$ α'' reell, $\vec{n}''$ reell, gewöhnl. ebene Welle im Medium 2 (Brechung)

$$a'_{\parallel} = a_{\parallel} \frac{\tan(\alpha-\alpha'')}{\tan(\alpha+\alpha'')}$$

kann 0 sein

$n_{12} \neq 1$!

$$a'_{\perp} = -a_{\perp} \frac{\sin(\alpha-\alpha'')}{\sin(\alpha+\alpha'')}$$

alle Faktoren reell, endlich (auch für $\alpha = \alpha'' = 0$)

$$a''_{\parallel} = a_{\parallel} \frac{2\sin\alpha''\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha'')\cos(\alpha-\alpha'')}$$

$\neq 0$ (auch für $\alpha = \alpha'' = 0$)

$$a''_{\perp} = a_{\perp} \frac{2\sin\alpha''\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha'')}$$

1) Sonderfall: $\alpha + \alpha'' = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\tan(\alpha+\alpha'') = +\infty$, $a'_{\parallel} = 0$!

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \alpha'' &= \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''} &= n_{12} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(s. Aufgabe 17) Brewster} \measuredangle$$

$$\alpha = \alpha_B = \arctan n_{12}$$

ω !

$\alpha = \alpha_B$: $\tan(\alpha + \alpha'') = +\infty$, $\sin(\alpha + \alpha'') = 1$

$$a_{\parallel}' = a_{\parallel} \cdot 0 = 0 \quad \text{(für beliebiges } a_{\parallel}\text{)}$$

$$a_{\perp}' = - a_{\perp} \sin(\alpha - \alpha'') \text{ - - - } > 0 \text{ oder } < 0$$

$$a_{\parallel}'' = a_{\parallel} \frac{2 \sin\alpha'' \cos\alpha}{\cos(\alpha - \alpha'')}$$

$$a_{\perp}'' = a_{\perp} \, 2 \sin\alpha'' \cos\alpha$$

beide > 0

$\Longrightarrow$ reflektierte Welle $\exists$ nur im Fall $a_{\perp} \neq 0$ und ist dann linear polarisiert mit $a_{\parallel}' = 0$

gebrochene Welle hat im Fall $(a_{\parallel}, a_{\perp}) \neq (0,0)$

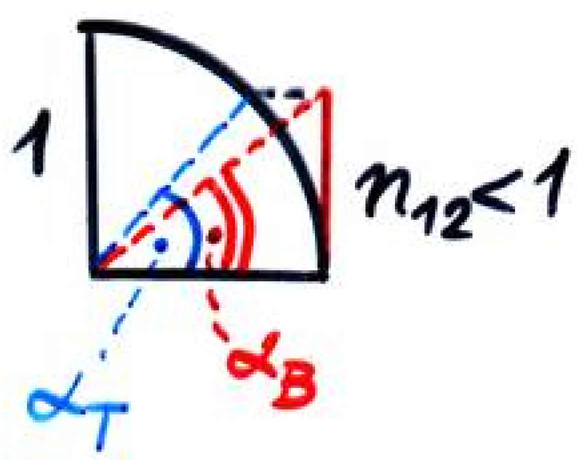
$$\delta_{\perp}'' - \delta_{\parallel}'' = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$$

und ist im Fall $a_{\perp} = 0$ linear polarisiert mit $a_{\perp}'' = 0$

und im Fall $a_{\parallel} = 0$ linear polarisiert mit $a_{\parallel}'' = 0$

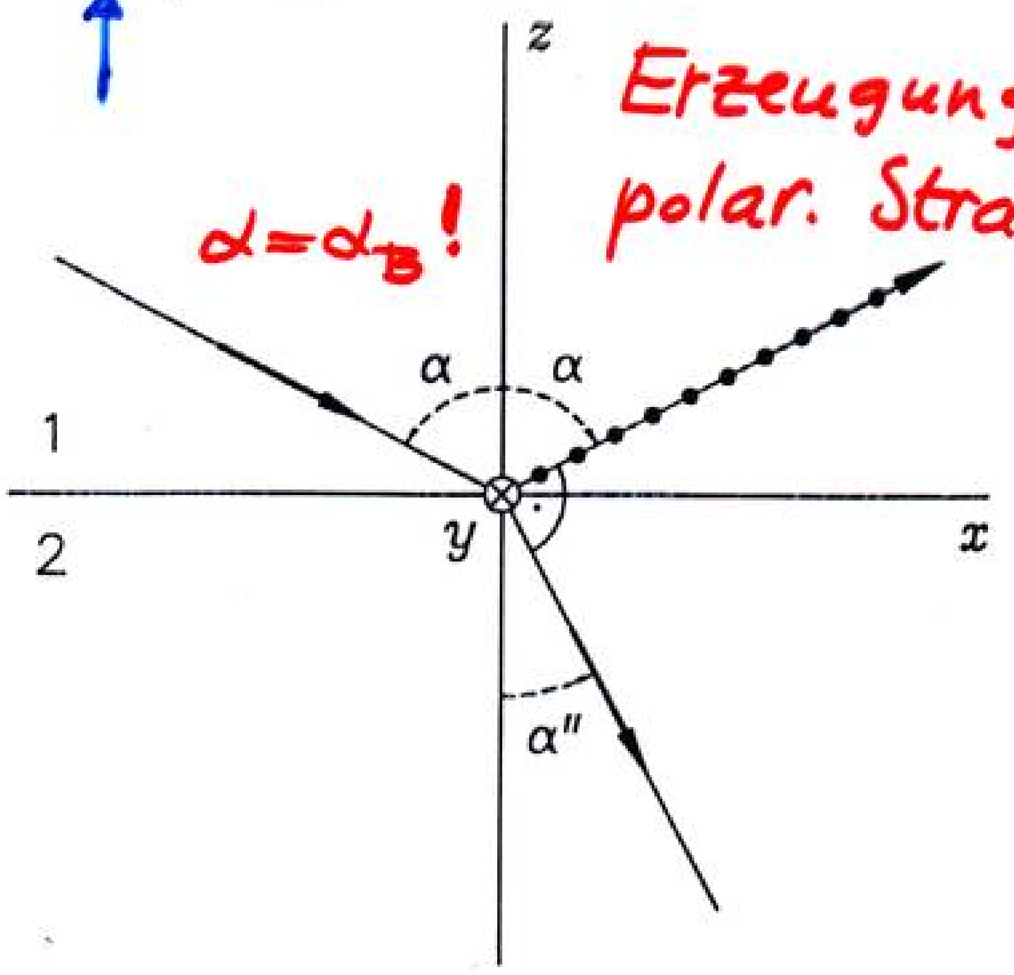
Zeichnung für $n_{12} > 1$. Beachte, daß im Fall $n_{12} < 1$ wegen $\tan\alpha_B = \sin\alpha_T = n_{12} < 1$

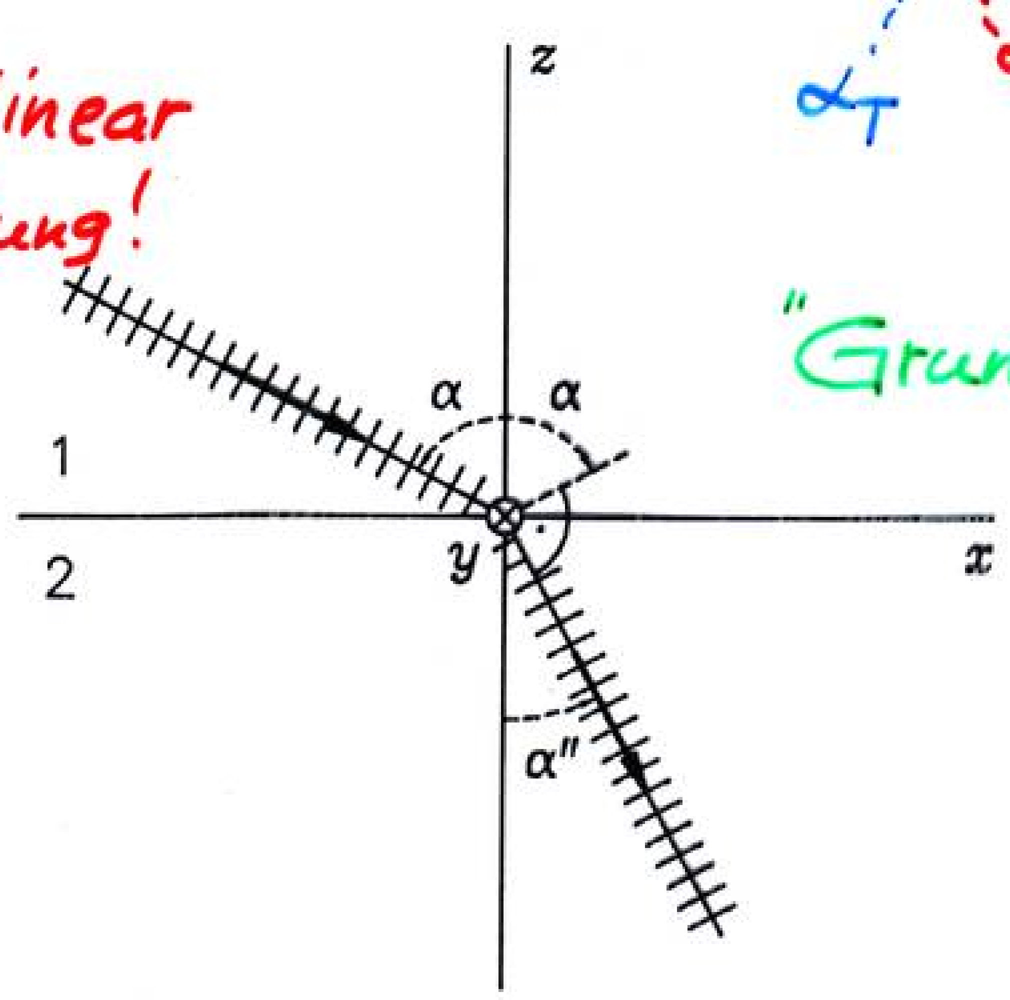
$\alpha_B < \alpha_T$ gilt!



Erzeugung linear polar. Strahlung!

$\alpha = \alpha_B$!





"Grund"?

beide $\neq 0$ (auch für $\alpha = \alpha'' = 0$!)

2) $\alpha \neq \alpha_B$

$$a'_{\parallel} = a_{\parallel} \boxed{\frac{\tan(\alpha - \alpha'')}{\tan(\alpha + \alpha'')}}$$

$$a'_{\perp} = -a_{\perp} \boxed{\frac{\sin(\alpha - \alpha'')}{\sin(\alpha + \alpha'')}}$$

entgegengesetztes Vorzeichen falls $\alpha < \alpha_B$ $(\alpha + \alpha'' < \frac{\pi}{2})$, gleiches Vorzeichen, falls $\alpha > \alpha_B$ $(\alpha + \alpha'' > \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$ im Fall $(a_{\parallel}, a_{\perp}) \neq (0,0)$ gilt (gleichgültig, welches Medium das optisch dichtere ist!)

$$\delta'_{\perp} - \delta'_{\parallel} = \begin{cases} \delta_{\perp} - \delta_{\parallel} + \pi & \text{für } \alpha < \alpha_B \\ \delta_{\perp} - \delta_{\parallel} & \text{für } \alpha > \alpha_B \end{cases}$$

(a) $\alpha_B < \alpha < \frac{\pi}{2}$

(b) $\alpha_B < \alpha \leq \alpha_T$

Beachte: $a_{\parallel} = E_{\parallel} e^{i\delta_{\parallel}}$, $a_{\perp} = E_{\perp} e^{i\delta_{\perp}}$ usf. •

$$a''_{\parallel} = a_{\parallel} \boxed{\frac{2 \sin\alpha'' \cos\alpha}{\sin(\alpha + \alpha'')\cos(\alpha - \alpha'')}}$$

$$a''_{\perp} = a_{\perp} \boxed{\frac{2 \sin\alpha'' \cos\alpha}{\sin(\alpha + \alpha'')}}$$

beide > 0

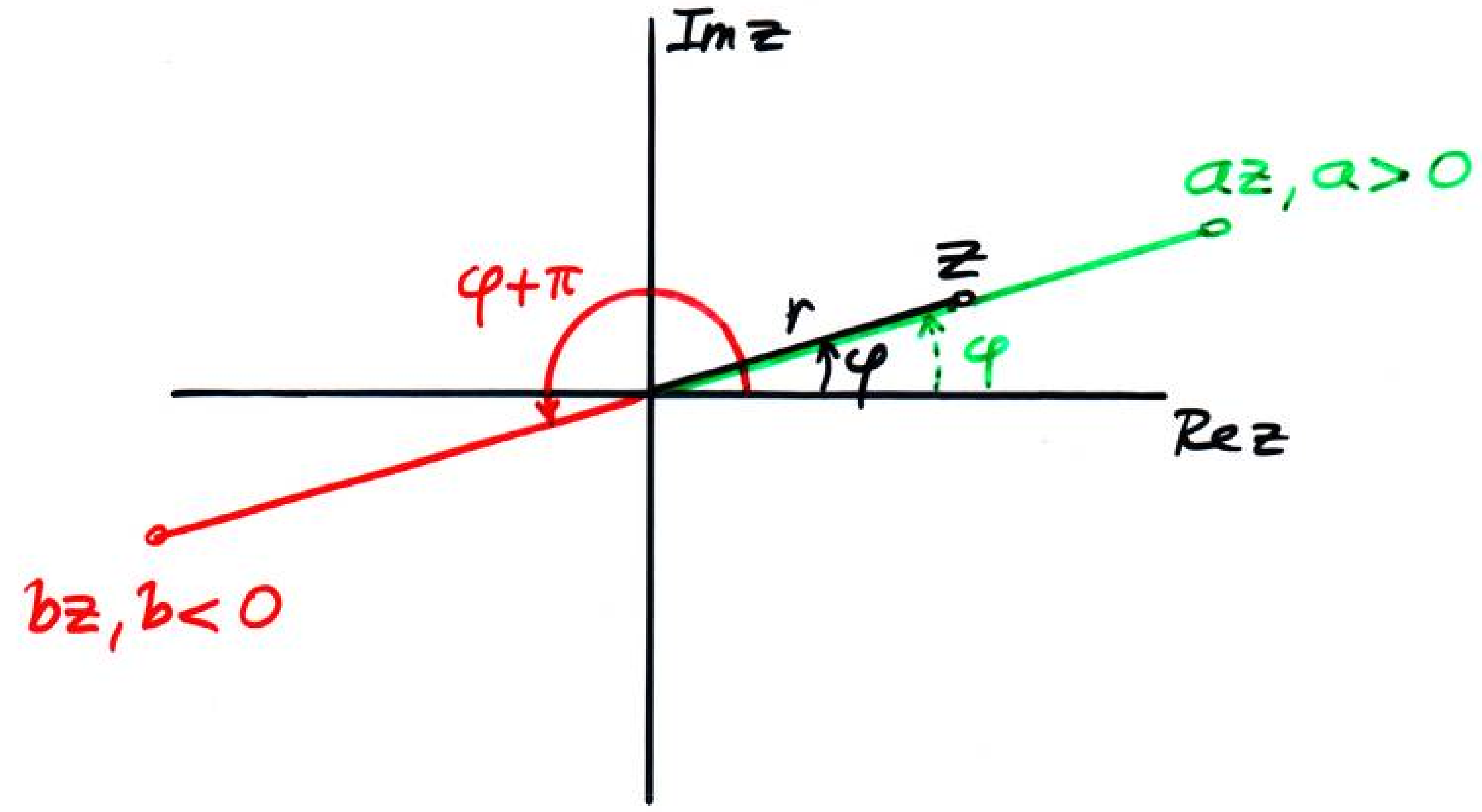
$\Rightarrow$ im Fall $(a_{\parallel}, a_{\perp}) \neq (0,0)$ gilt

$$\delta''_{\perp} - \delta''_{\parallel} = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$$

$\Rightarrow$ Aussagen über Polarisation der reflektierten und gebrochenen Welle s. Skriptum S. 180.

Komplexe Zahlen:

$$z = |z| e^{i \arg z} = r e^{i\varphi}$$



INTENSITÄTEN

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,(\vec{E} \times \underset{\substack{\parallel \\ \vec{B}}}{\vec{H}})$$

$\vec{B}$ gesetzt

Aufgabe 18 : zeitlich harmonische Felder

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ komplexwertig

$$\vec{E}_c(\vec{r},t) = \vec{\alpha}(\vec{r})\,e^{-i\omega t} \quad , \quad \vec{B}_c(\vec{r},t) = \vec{\beta}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\vec{S}} = \frac{c}{4\pi}\,\overline{(\vec{E} \times \vec{B})} = \frac{c}{4\pi}\,\overline{(\mathrm{Re}\,\vec{E}_c \times \mathrm{Re}\,\vec{B}_c)}$$

$$= \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,(\vec{E}_c \times \vec{B}_c^{*})$$

Aufgabe 19 : ebene Wellen in transp. Medium

$$\vec{E}_c(\vec{r},t) = \vec{a}\,e^{i\left[\sqrt{\varepsilon}\,\frac{\omega}{c}\,\vec{n}\cdot\vec{r} - \omega t\right]}$$

$$\vec{B}_c^{*}(\vec{r},t) = \vec{n} \times \sqrt{\varepsilon}\,\vec{E}_c^{*}(\vec{r},t)$$

[$\varepsilon \equiv \varepsilon(\omega)$ reell , $\vec{n}$ reeller Einheitsvektor]

$$\Rightarrow \quad \overline{\vec{S}} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon}\,\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{a}^{*})}_{\equiv |\vec{a}|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2}\,\vec{n}$$

$$I = |\overline{\vec{S}}| = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon}\,|\vec{a}|^2$$

Reflexion und Brechung:

$$I^{(einf)} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\left(|a_\perp|^2 + |a_\parallel|^2\right)$$

$$I^{(refl)} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\left(|a'_\perp|^2 + |a'_\parallel|^2\right)$$

gilt auch im Fall (b).

ortsunabh.

$$I^{(gebr)} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_2}\left(|a''_\perp|^2 + |a''_\parallel|^2\right)$$

nur im Fall (a) gültig!

Frage: Warum Interferenzterme im Medium 1 nicht berücksichtigt? Fall (a) + Fall (b)

Medium 1: $\vec{E}_{\cancel{c}1} = \vec{E}_{\cancel{c}}^{(einf)} + \vec{E}_{\cancel{c}}^{(refl)}$

$$\vec{B}_{\cancel{c}1} = \vec{B}_{\cancel{c}}^{(einf)} + \vec{B}_{\cancel{c}}^{(refl)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 \times \vec{B}_1 = \vec{E}^{(einf)} \times \vec{B}^{(einf)} + \vec{E}^{(refl)} \times \vec{B}^{(refl)} + \underline{\vec{E}^{(einf)} \times \vec{B}^{(refl)}} + \underline{\vec{E}^{(refl)} \times \vec{B}^{(einf)}}$$

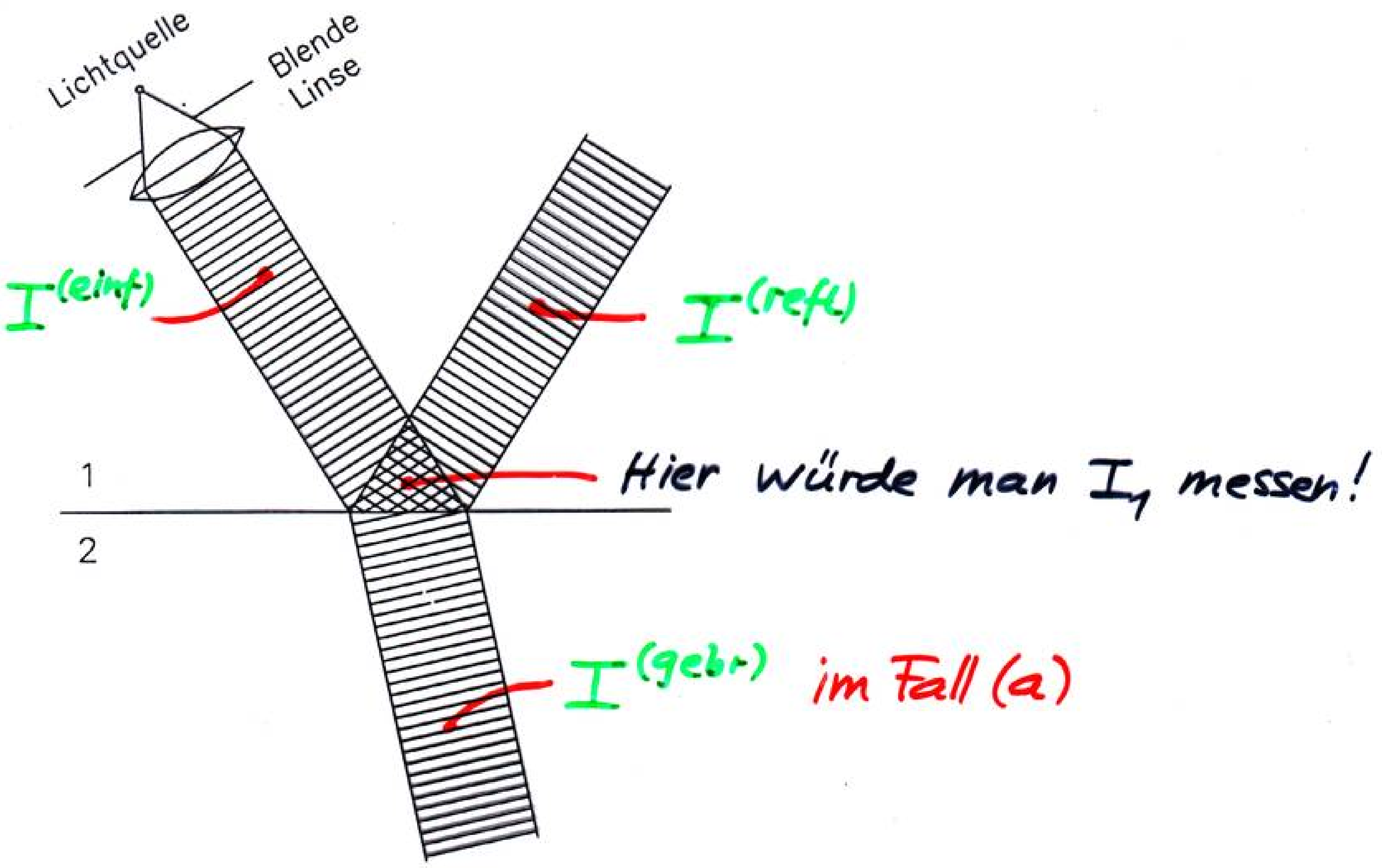
$$\Rightarrow \overline{\vec{S}_1} = \overline{\vec{S}^{(einf)}} + \overline{\vec{S}^{(refl)}} + \underbrace{\overline{\text{Interferenzterm}}}_{\neq\, 0}$$

$$I_1 = |\overline{\vec{S}_1}|$$

(nur z-Komp. null; s. später)

Antwort: Grund ist die experimentelle Art der Messung der Intensitäten.

Messung der Intensitäten: "Lichtstrahlen"



Reflexions- und Transmissionskoeffizient

Aufgabe 20:

$$\overline{S_{1,z}} = \overline{S_z^{(einf)}} + \overline{S_z^{(refl)}} + \underbrace{\cancel{\overline{\text{Interferenzterme}}}}_{0}$$

(Von null verschiedene Interferenzterme nur bei x- und y-Komponente)

WICHTIG FÜR ENERGIESTRÖMUNGSBILANZ AN DER GRENZFLÄCHE!

Allgemein gültig (Fall (a) und Fall (b)):

Die bei der Ableitung der Fresnelschen Formeln benützten Stetigkeitsbedingungen $\vec{E}_{1,t} = \vec{E}_{2,t}$, $\vec{H}_{1,t} = \vec{H}_{2,t}$ gewährleisten die Stetigkeit der Normalkomponente von $\vec{S}$ in der Grenzfläche:

$$S_{1,z}(x,y,0,t) = S_{2,z}(x,y,0,t) \quad , \ \forall x,y,t$$

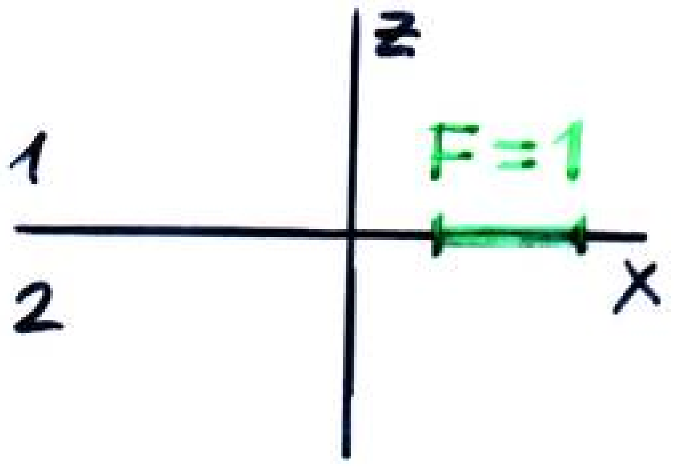
$$\Rightarrow \quad \overline{S_{1,z}} = \overline{S_{2,z}}$$

in der Grenzfläche (Größen unabhängig von x, y, t)

$$\overline{S_{1,z}} = \overline{S_z^{(einf)}} + \overline{S_z^{(refl)}} \qquad \overline{S_{2,z}} = \left[\ \overline{S_z^{(gebr)}} \ \text{im Fall (a)} \right]$$

(Interferenzterm 0)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{-S_z^{(einf)}} = \overline{S_z^{(refl)}} + (\overline{-S_{2,z}})} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\overline{-S_z^{(einf)}}}$$



Energieströmungsbilanz an der Grenzfläche

INTERPRETATION!

$$\Rightarrow \quad 1 = \underbrace{\frac{\overline{S_z^{(refl)}}}{\overline{-S_z^{(einf)}}}}_{=:R} + \underbrace{\frac{\overline{-S_{2,z}}}{\overline{-S_z^{(einf)}}}}_{=:T}$$

$$\underline{\underline{R + T = 1}} \qquad \Big| \ \text{"100\%"}$$

ebene Welle: $\vec{S} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon}\,|\vec{a}|^2\,\vec{n}$

Fall (a) und Fall (b):

$$-\overline{S_z^{(einf)}} = -\underbrace{\frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\,|\vec{a}|^2}_{I^{(einf)}}\,\underbrace{n_z}_{-\cos\alpha} = I^{(einf)}\cos\alpha > 0$$

$$\overline{S_z^{(refl)}} = \underbrace{\frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\,|\vec{a}'|^2}_{I^{(refl)}}\,\underbrace{n'_z}_{\cos\alpha' = \cos\alpha} = I^{(refl)}\cos\alpha \geq 0$$

Nur Fall (a):

$$-\overline{S_{2,z}} = -\overline{S_z^{(gebr)}} = -\underbrace{\frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_2}\,|\vec{a}''|^2}_{I^{(gebr)}}\,\underbrace{n''_z}_{-\cos\alpha''} = I^{(gebr)}\cos\alpha'' > 0$$

(a), (b):

$$R = \frac{\overline{S_z^{(refl)}}}{-\overline{S_z^{(einf)}}} = \frac{I^{(refl)}}{I^{(einf)}} = \frac{|\vec{a}'|^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{|a'_\perp|^2 + |a'_\parallel|^2}{|a_\perp|^2 + |a_\parallel|^2}$$

(a), (b): $T = 1 - R$

(a):

$$T = \frac{-\overline{S_z^{(gebr)}}}{-\overline{S_z^{(einf)}}} = \frac{I^{(gebr)}}{I^{(einf)}}\cdot\frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha} = n_{12}\frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha}\cdot\frac{|\vec{a}''|^2}{|\vec{a}|^2}$$

Zähler: $-\overline{S_{2,z}} = -\overline{S_z^{(gebr)}}$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha''}{\sin\alpha''\cos\alpha}\cdot\frac{|a''_\perp|^2 + |a''_\parallel|^2}{|a_\perp|^2 + |a_\parallel|^2}$$

(b) $R = 1$, $T = 0$ s. später

R, T abhängig von α (und ω)

Fall (b): TOTALREFLEXION

VS: $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ und $\alpha > \alpha_T = \arcsin n_{12}$
$(n_{12} < 1)$

$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} < 1$

Polarisations- und Intensitätsverhältnisse im Medium 1:

imaginär!

$$a'_{\parallel} = a_{\parallel} \frac{n_{12}\cos\alpha - \cos\alpha''}{n_{12}\cos\alpha + \cos\alpha''}$$

$$a'_{\perp} = a_{\perp} \frac{\cos\alpha - n_{12}\cos\alpha''}{\cos\alpha + n_{12}\cos\alpha''}$$

mit

$\sin^2\alpha'' = \frac{\sin^2\alpha}{n_{12}^2}$

$$\cos\alpha'' = +i\sqrt{\sin^2\alpha'' - 1} = i\,\frac{\sqrt{\sin^2\alpha - n_{12}^2}}{n_{12}}$$

imaginär

$n_{12}^2 = \sin^2\alpha_T$

$\Longrightarrow$

$$a'_{\parallel} = a_{\parallel} \frac{n_{12}\cos\alpha - i\,\frac{\sqrt{\sin^2\alpha - n_{12}^2}}{n_{12}}}{n_{12}\cos\alpha + i\,\frac{\sqrt{\sin^2\alpha - n_{12}^2}}{n_{12}}}$$

unimodular!

$$a'_{\perp} = a_{\perp} \frac{\cos\alpha - i\sqrt{\sin^2\alpha - n_{12}^2}}{\cos\alpha + i\sqrt{\sin^2\alpha - n_{12}^2}}$$

$$\frac{a - ib}{a + ib} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}\, e^{-i\phi}}{\sqrt{a^2+b^2}\, e^{i\phi}} = e^{-2i\phi}$$

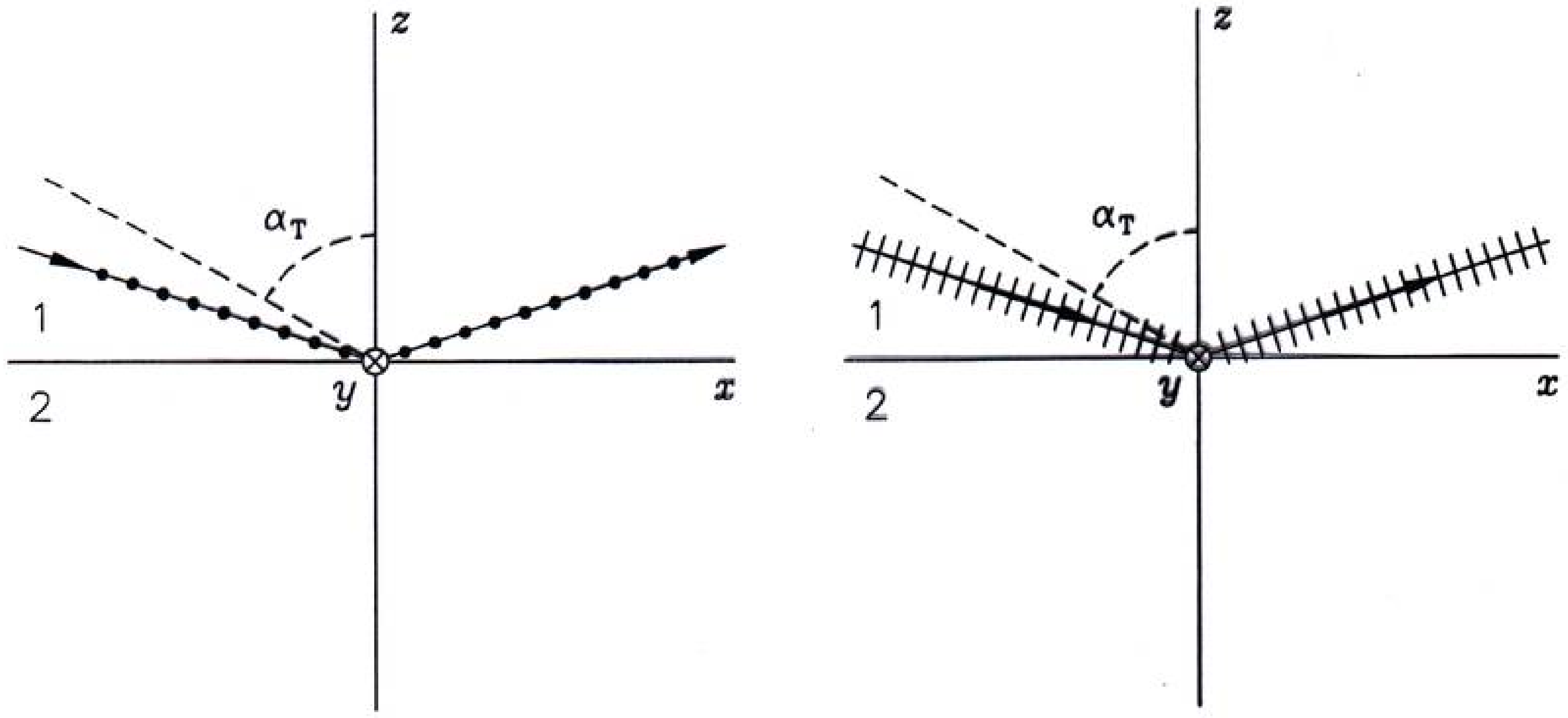
mit $\phi = \arctan\frac{b}{a}$

$$a_{\parallel}' = a_{\parallel}\, e^{-2i\arctan\frac{\sqrt{\sin^2\alpha - n_{12}^2}}{n_{12}^2\cos\alpha}}$$

$$a_{\perp}' = a_{\perp}\, e^{-2i\arctan\frac{\sqrt{\sin^2\alpha - n_{12}^2}}{\cos\alpha}}$$

Folgerungen für den Polarisationszustand s. Skriptum S. 185

speziell:



Folgerungen für die Intensitäten:

$$|a_{\parallel}'| = |a_{\parallel}| \quad , \quad |a_{\perp}'| = |a_{\perp}|$$

$\Rightarrow$

$$I^{(refl)} = I^{(einf)} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\,(|a_{\perp}|^2 + |a_{\parallel}|^2)$$

$\Rightarrow$ $R = 1 \,,\ T = 0$ "Totalreflexion",

d.h. im Zeitmittel strömt keine Energie ins Medium 2 ein:

$$\overline{S_{2,z}} = 0$$

(expliziter Beweis Skriptum S. 188f)

Eindringtiefe und Phasengeschwindigkeit der inhomogenen Welle im Medium 2:

Skriptum S. 173: $\quad n_x = \sin\alpha$

$$\vec{E}_{c2}(\vec{r},t) = \vec{a}''\, e^{-\sqrt{\varepsilon_1 n_x^2 - \varepsilon_2}\,\frac{\omega}{c}|z|}\; e^{i(\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c} n_x x - \omega t)}$$

$$\vec{E}_{c2}(\vec{r},t) = \vec{a}''\, e^{-\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c}\sqrt{\sin^2\alpha - n_{12}^2}\,|z|}\; e^{i(\underbrace{\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c}\sin\alpha}_{\hat{=}\, k}\cdot x - \omega t)}$$

$$e^{i(kx-\omega t)} \longleftrightarrow v_{Ph} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c}\sin\alpha} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}\frac{1}{\sin\alpha} \quad \Big|\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_2}}$$

$$n_{12} = \sin\alpha_T < 1$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}\frac{n_{12}}{\underbrace{\sin\alpha}_{<1}} < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} \equiv v_2$$

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}\frac{\sin\alpha_T}{\sin\alpha}$$

$\alpha \uparrow \frac{\pi}{2}$: $v_{Ph} \downarrow \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} n_{12}$

$\alpha \downarrow \alpha_T$: $v_{Ph} \uparrow \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} \equiv v_2$

$$d = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}\frac{\omega}{c}\sqrt{\sin^2\alpha - n_{12}^2}} = \frac{n_{12}}{\sqrt{\varepsilon_2}\frac{\omega}{c}\sqrt{\sin^2\alpha - n_{12}^2}}$$

$$\lambda_2 \nu = v_2\,, \quad \frac{\lambda_2}{2\pi}\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}\,, \quad \frac{\lambda_2}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}\frac{\omega}{c}}$$

$$= \frac{\lambda_2}{2\pi}\frac{n_{12}}{\sqrt{\sin^2\alpha - n_{12}^2}} \sim \lambda_2 \text{ falls } \alpha \text{ nicht zu nahe bei } \alpha_T$$

$$\frac{\lambda_2}{2\pi}\frac{\sin\alpha_T}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha_T}}$$

$\alpha \uparrow \frac{\pi}{2}$: $d \downarrow \frac{\lambda_2}{2\pi}\frac{n_{12}}{\sqrt{1-n_{12}^2}}$

$\alpha \downarrow \alpha_T$: $d \uparrow +\infty$

s. Aufgabe 21

Totalreflexion : $R=1$, $T=0$

$$I^{(refl)} = I^{(ein)}$$

Wie kommt dann die inhomogene Welle im Medium 2 (die ja Energie in x-Richtung transportiert) zustande?