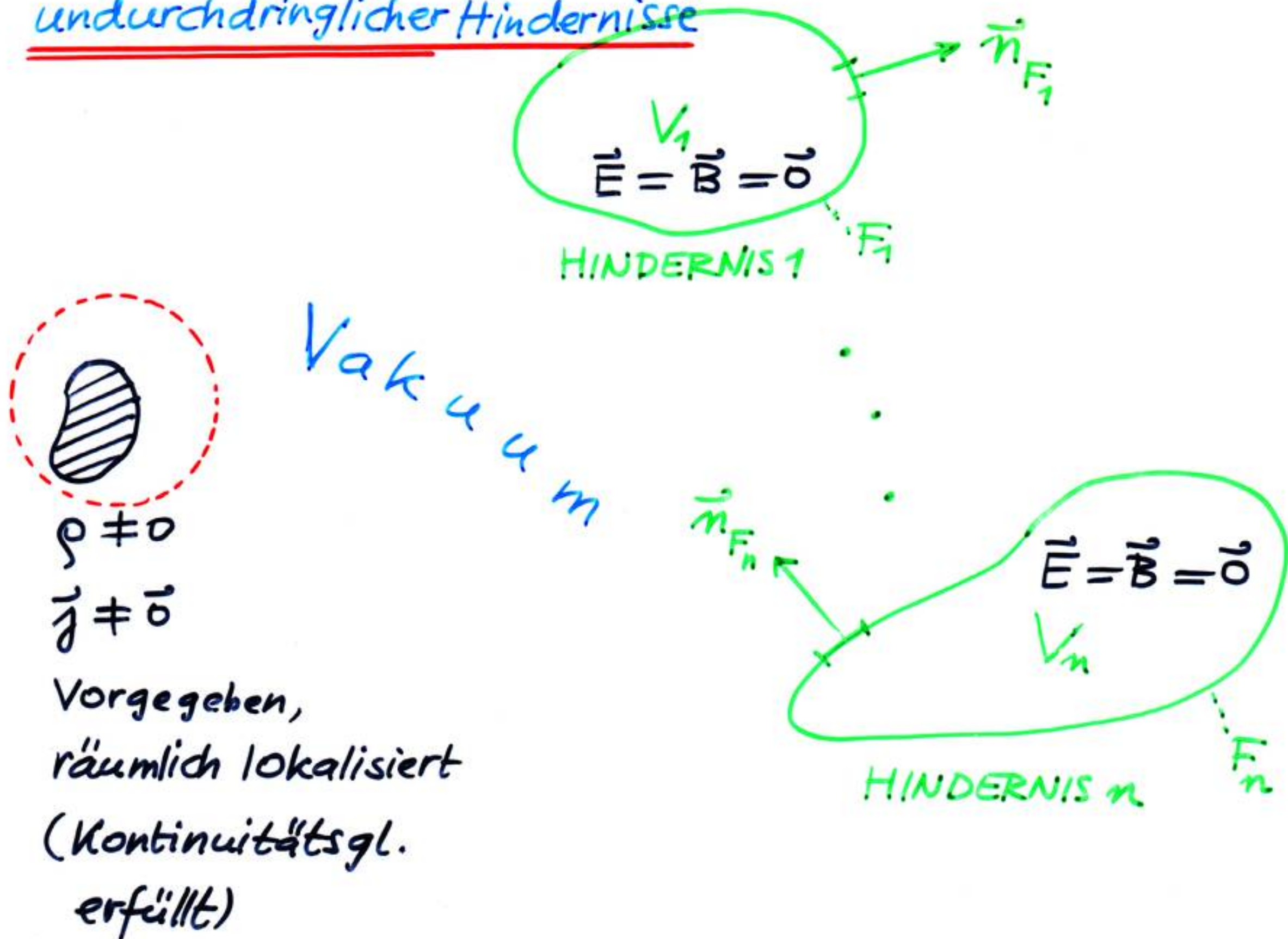


Beugungstheorie im weiteren Sinn:

Grundaufgabe der Elektrodynamik bei Anwesenheit undurchdringlicher Hindernisse



HINDERNISSE:

"ideale Leiter" ohne
Überschuldung,
glatte Oberflächen,
ganz im Endlichen

RB für $\vec{r} \in F_\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, n$

$$\vec{E}_{tg} = \vec{0}, \quad \vec{B}_n = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\vec{n}_{F_\lambda} \times \vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{n}_{F_\lambda} \cdot \vec{B} = 0$$

Bestimmungsgln. für \vec{K}, σ :

$$\vec{n}_{F_\lambda} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{K}, \quad E_n = 4\pi\sigma$$

$$\text{bzw.} \quad \vec{n}_{F_\lambda} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{K}, \quad \vec{n}_{F_\lambda} \cdot \vec{E} = 4\pi\sigma$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad} \varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

FG

$$\Delta \varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi \rho(\vec{r}, t)$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\text{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

$$\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$$

+ RB

$$\vec{n}_{F_\lambda}(\vec{r}) \times \left(\text{grad} \varphi(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

$$\vec{n}_{F_\lambda}(\vec{r}) \cdot \text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\vec{r} \in F_\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, n$$

$$\forall t$$

+ Ausstrahlungsbedingungen

(kompliziert; man muß Aussage über das Verhalten jeder Fourierkomponente für $r \rightarrow +\infty$ machen, s. Stumpf - Schuler)

"Eingeschwungener" (stationärer) Zustand

bei zeitlich harmonischen Quellen (Kreisfrequenz ω)

Komplexe Schreibweise

$$\mu_c(\vec{r}, t) = \mu_c(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2$$

$$\vec{E}_c(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi_c(\vec{r}) + ik \vec{A}_c(\vec{r})$$

$$\vec{B}_c(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}_c(\vec{r})$$

$$k := \frac{\omega}{c}$$

FG

$$\Delta \varphi_c(\vec{r}) + k^2 \varphi_c(\vec{r}) = -4\pi \rho_c(\vec{r})$$

$$\Delta \vec{A}_c(\vec{r}) + k^2 \vec{A}_c(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_c(\vec{r})$$

$$\text{div } \vec{A}_c(\vec{r}) - ik \varphi_c(\vec{r}) = 0$$

Was ist einfacher geworden?

$$\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$$

+ RB*)

$$\vec{n}_{F_\lambda}(\vec{r}) \times (\text{grad } \varphi_c(\vec{r}) - ik \vec{A}_c(\vec{r})) = \vec{0}$$

$$\vec{r} \in F_\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, n$$

+ Ausstrahlungsbedingungen ... "von der Ordnung"

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_c(\vec{r}) &= O\left(\frac{1}{r}\right) \\ \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{E}_c(\vec{r}) &= o\left(\frac{1}{r}\right) \\ \vec{E}_c(\vec{r}) - ik \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E}_c(\vec{r})\right) &= o\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \right\} \text{für } r \rightarrow +\infty$$

"stärker gegen Null als"

*) $\vec{n}_{F_\lambda}(\vec{r}) \cdot \text{rot } \vec{A}_c(\vec{r}) = 0, \vec{r} \in F_\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, n$
nicht benötigt (redundant)

Stationäre Beugungstheorie im weiteren Sinn

- 1) Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösung
- 2) exakte Lösung für Problem mit einer Kugel und Problem mit einem Zylinder bekannt

Beugungstheorie im engeren Sinn

Annahmen:

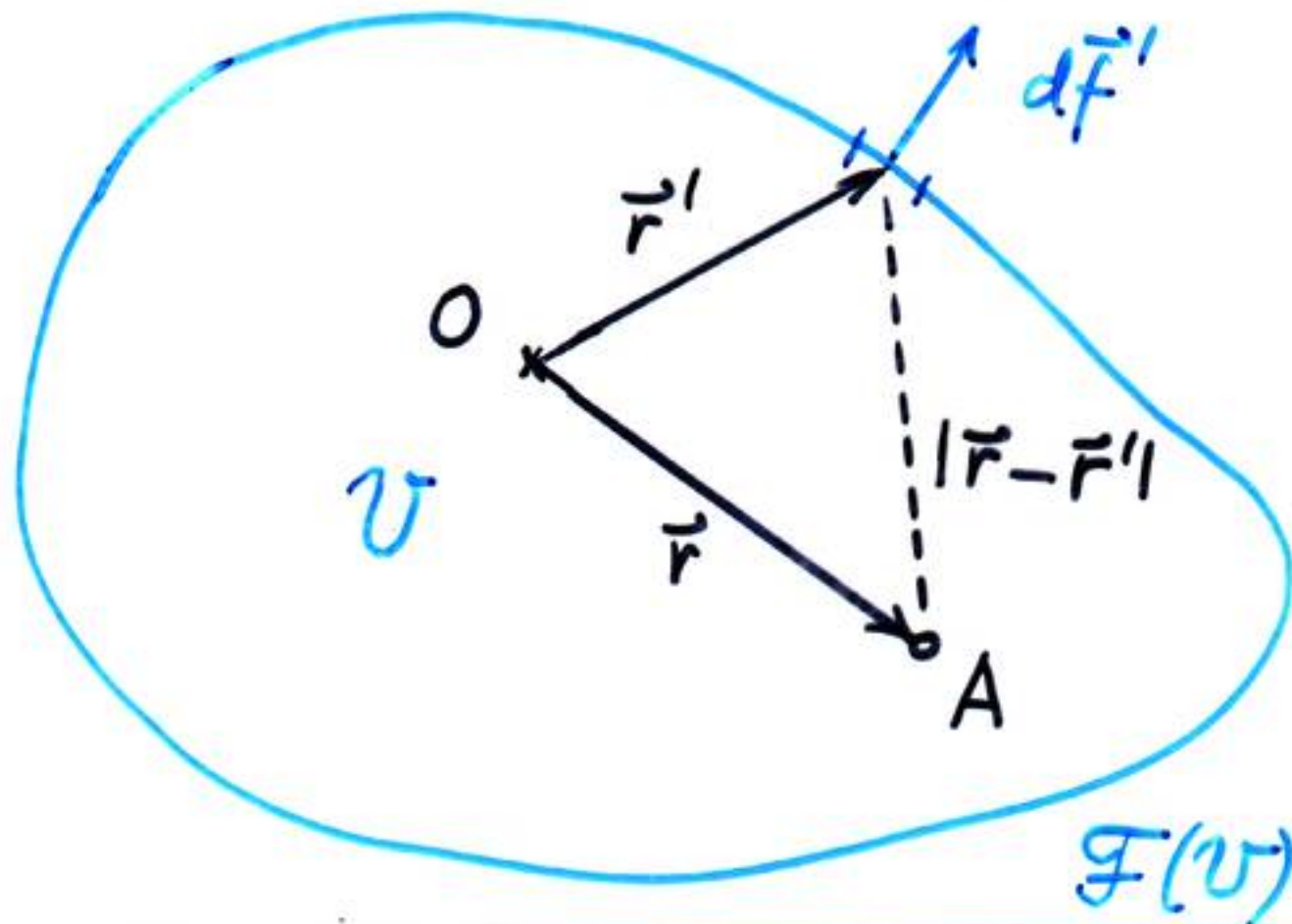
- a) Quellverteilung so weit von Hindernissen entfernt,
daß im Bereich der Hindernisse nur mehr Wellenfeld berücksichtigt werden muß ("Lichtquelle")
- b) Lösung im Bereich der Hindernisse und "dahinter" gesucht
- c) Ausdehnung der Hindernisse und Abstände zwischen den Hindernissen sollen groß sein gegen die im Wellenfeld vertretenen Wellenlängen (Spezialfall: Stationäre Beugungstheorie im engeren Sinn)

In erster Näherung gilt dann die geometrische Optik (Lichtstrahlen, geometrische Schattengrenze, Schatten, Halbschatten etc.), und die Aufgabe der Beugungstheorie ist es, die Abweichungen von der geometrischen Optik, insbesondere in der Nähe der geometrischen Schattengrenzen (Interferenzmuster) zu beschreiben.

Mathematischer Hilfssatz zur Helmholtzgleichung



$$q_c \neq 0$$



Ist $\psi_c(\vec{r})$ irgendeine Lösung von

$$\Delta \psi_c(\vec{r}) + k^2 \psi_c(\vec{r}) = -4\pi q_c(\vec{r}),$$

so gilt für $\forall \vec{r} \in U$ die Identität

$$\psi_c(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{F(U)} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\text{grad}' \psi_c(\vec{r}') \right.$$

$$\left. + ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \psi_c(\vec{r}') \right] \cdot d\vec{f}'$$

HIER KOMMT q_c NIRGENDS VOR!

Beweis: 2. Greensche Formel

$$\int_U d^3r' [U(\vec{r}') \Delta' V(\vec{r}') - V(\vec{r}') \Delta' U(\vec{r}')]]$$

$$= \oint_{\mathcal{F}(U)} [U(\vec{r}') \text{grad}' V(\vec{r}') - V(\vec{r}') \text{grad}' U(\vec{r}')] \cdot d\vec{f}'$$

$$U(\vec{r}') = \frac{\psi_c(\vec{r}')}{4\pi} \quad \text{einsetzen und} \quad \Delta' \psi_c(\vec{r}') + k^2 \psi_c(\vec{r}') = 0, \quad \vec{r}' \in U$$

berücksichtigen

$$V(\vec{r}') = G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{einsetzen und}$$

Parameter

$$\Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

berücksichtigen (beachte: $\forall \vec{r}, \vec{r}'$ gilt dann auch mit Δ statt Δ')

[Zu zeigen ist für letzteres

$$\{\Delta + k^2\} \frac{e^{ikr}}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})$$

Aufg. (23)

bzw. $\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 \right\} \frac{e^{ikr}}{r} = 0, \quad r \neq 0$

$$\int_{K_E} \{\Delta + k^2\} \frac{e^{ikr}}{r} d^3r = -4\pi$$

div grad

$$\int_U [U(\vec{r}') \Delta' V(\vec{r}') - V(\vec{r}') \Delta' U(\vec{r}')] d^3r'$$

$$U(\vec{r}') = \frac{\psi_c(\vec{r}')}{4\pi}$$

$$V(\vec{r}') = G(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_U [\psi_c(\vec{r}') \underbrace{\Delta' G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') - 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} - G(\vec{r}, \vec{r}') \underbrace{\Delta' \psi_c(\vec{r}')}_{-k^2 \psi_c(\vec{r}')}] d^3r'$$

$$= - \int_U \psi_c(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' = -\psi_c(\vec{r}) \quad \vec{r} \in U \text{ !}$$

$$= \oint_{\mathcal{F}(U)} [U(\vec{r}') \text{grad}' V(\vec{r}') - V(\vec{r}') \text{grad}' U(\vec{r}')] \cdot d\vec{f}'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}(U)} [\psi_c(\vec{r}') \text{grad}' G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \text{grad}' \psi_c(\vec{r}')] \cdot d\vec{f}'$$

$$ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left(-\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \quad \frac{\partial}{\partial x'} |\vec{r} - \vec{r}'| = -\frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ usf.}$$

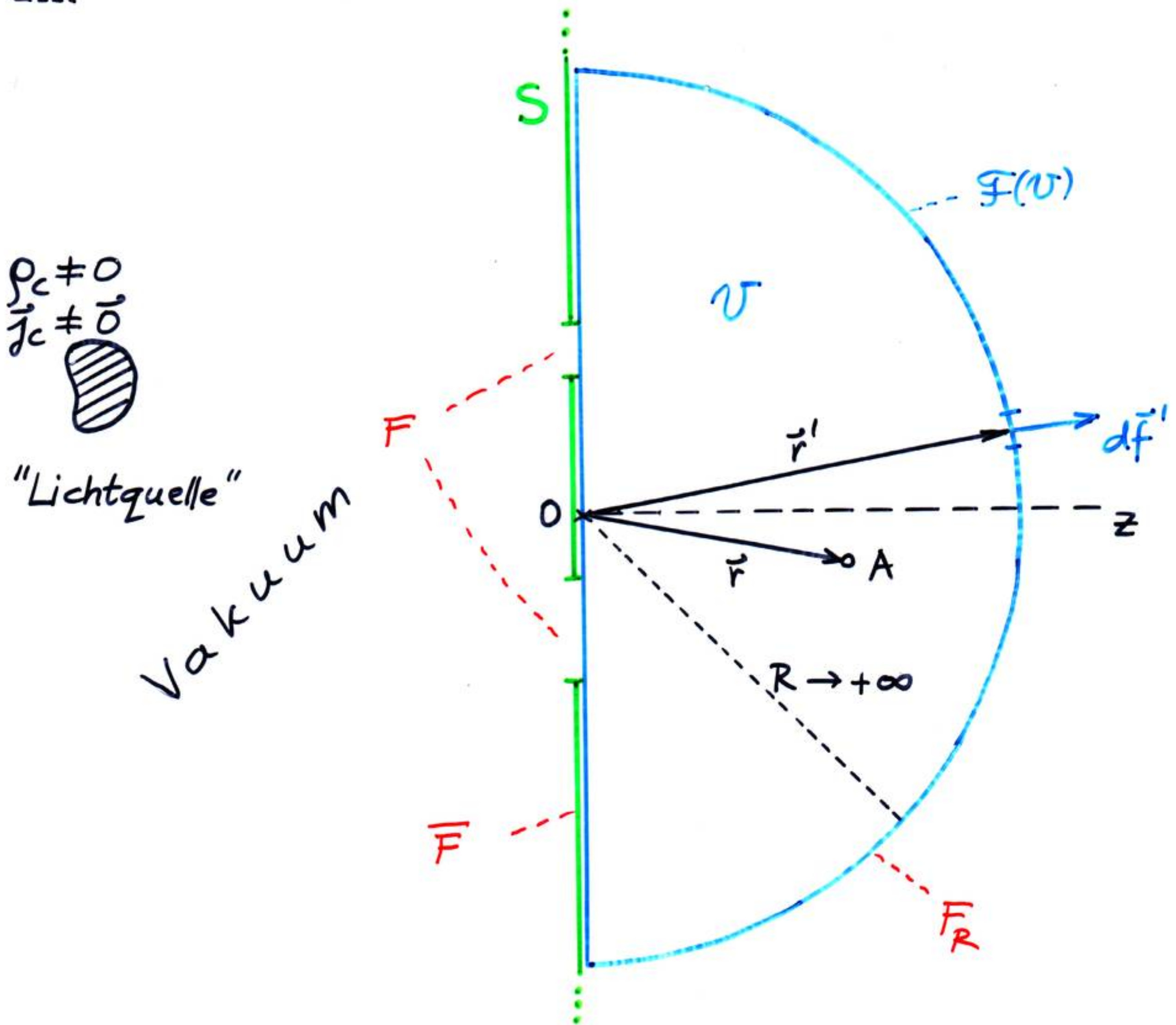
$$= -\frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}(U)} \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\text{grad}' \psi_c(\vec{r}') + ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \psi_c(\vec{r}') \right] \cdot d\vec{f}'$$

Alternativ:

$$\psi_c(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}(U)} \psi_c(\vec{r}') \text{grad}' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \cdot d\vec{f}' \quad \text{problem = spezifisch!} \quad \text{qed}$$

KIRCHHOFFSCHE BEUGUNGSTHEORIE

VS der Beugungstheorie im engeren Sinne sollen erfüllt sein



$F(u)$ setzt sich zusammen aus:

- 1) den Schirmöffnungen $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$
- 2) dem undurchlässigen Schirmteil \bar{F}
- 3) der Halbkugelfläche F_R ($R \rightarrow +\infty$)

Würde man die exakte Lösung des gegebenen Beugungsproblems kennen, welche die inhomogenen Helmholtzgleichungen für $\varphi_c(\vec{r})$, $\vec{A}_c(\vec{r})$, die Lorenzgleichung, die RB auf S und die Ausstrahlungsbedingungen im Unendlichen erfüllt, so müßten nach dem math. Hilfssatz für diese Lösung die Kirchhoffschen Identitäten gelten:

$$\varphi_c(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}(U)} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\text{grad}' \varphi_c(\vec{r}') + ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \varphi_c(\vec{r}') \right] \cdot d\vec{f}'$$

--- $\sum_{l=1}^3 \frac{\partial \varphi_c(\vec{r}')}{\partial x'_l} df'_l$

$$A_{cj}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^3 \oint_{\mathcal{F}(U)} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\frac{\partial A_{cj}(\vec{r}')}{\partial x'_l} + ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{x_l - x'_l}{|\vec{r}-\vec{r}'|} A_{cj}(\vec{r}') \right] df'_l$$

$$\vec{r} \in U$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Diese Gleichungen sind nicht Bestimmungsgleichungen (Integralgleichungen) für die gesuchte Lösung!

(RWA für Helmholtzgleichung: stabile Lösung nur für Dirichletsche, Neumannsche oder gemischte RB!)

Kirchhoffsche "Rezepte"

(I) (Mathematisch inkonsistent mit Helmholtzgleichung!)

$$\varphi_c(\vec{r}') = A_{cj}(\vec{r}') = \frac{\partial \varphi_c(\vec{r}')}{\partial z'} = \frac{\partial A_{cj}(\vec{r}')}{\partial z'} = 0$$

gesetzt für $\vec{r}' \in \bar{F}$ \Rightarrow kein Beitrag von \bar{F}

(II)

$$\varphi_c(\vec{r}') = \varphi_c^{(e)}(\vec{r}') \quad , \quad A_{cj}(\vec{r}') = A_{cj}^{(e)}(\vec{r}')$$

$$\frac{\partial \varphi_c(\vec{r}')}{\partial z'} = \frac{\partial \varphi_c^{(e)}(\vec{r}')}{\partial z'} \quad , \quad \frac{\partial A_{cj}(\vec{r}')}{\partial z'} = \frac{\partial A_{cj}^{(e)}(\vec{r}')}{\partial z'}$$

gesetzt für $\vec{r}' \in F$

(III)

$$\varphi_c(\vec{r}') \underset{r' \rightarrow +\infty}{\sim} f(\vartheta', \varphi') \frac{e^{ikr'}}{r'}$$

$$A_{cj}(\vec{r}') \underset{r' \rightarrow +\infty}{\sim} g_j(\vartheta', \varphi') \frac{e^{ikr'}}{r'}$$

gesetzt im Halbraum $z > 0$ \Rightarrow kein Beitrag von F_R für $R \rightarrow +\infty$

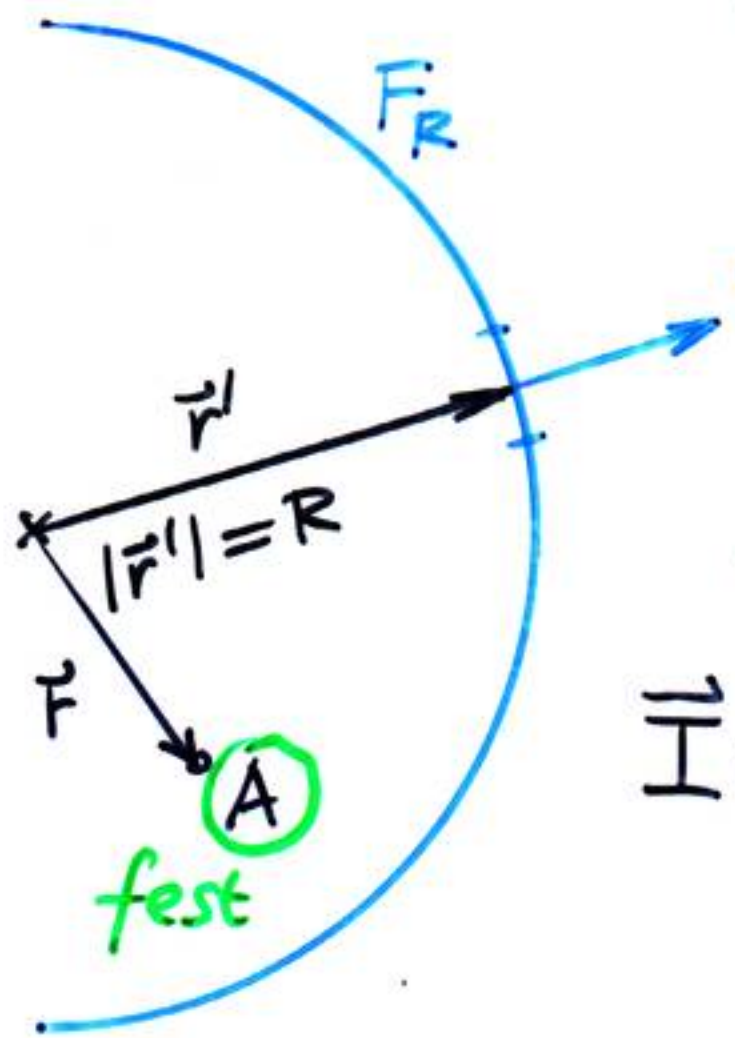
(Beweis folgt)

$$\frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$

auslaufende Kugelwelle

Mathematische Einwände!

Beweis, daß (III) zur Folge hat, daß der Beitrag von F_R für $R \rightarrow +\infty$ gegen null strebt



\vec{r} fest: $\vec{r} - \vec{r}' \sim -\vec{r}'$ für $|\vec{r}'| \rightarrow +\infty$

$$d\vec{f}' = \frac{\vec{r}'}{r'} df' = \frac{\vec{r}'}{r'} r'^2 d\Omega'$$

Integrand im Integral für $\varphi_c(\vec{r})$:

$$\vec{I}(\vec{r}') \cdot d\vec{f}' \underset{r' \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{ikr'}}{r'} [\text{grad}' \varphi_c(\vec{r}')$$

$$- ik \left(1 + \frac{i}{kr'}\right) \frac{\vec{r}'}{r'} \varphi_c(\vec{r}')] \cdot \frac{\vec{r}'}{r'} r'^2 d\Omega'$$

$$= \frac{e^{ikr'}}{r'} \left[\frac{\vec{r}'}{r'} \cdot \text{grad}' \varphi_c(\vec{r}') \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r'} \varphi_c(\vec{r}') = \left(ik - \frac{1}{r'} \right) f(\vartheta', \varphi') \frac{e^{ikr'}}{r'} + O\left(\frac{1}{r'^3}\right)$$

$$- ik \left(1 + \frac{i}{kr'}\right) \varphi_c(\vec{r}') \left] r'^2 d\Omega'\right.$$

$$f(\vartheta', \varphi') \frac{e^{ikr'}}{r'} + O\left(\frac{1}{r'^2}\right)$$

$$= \frac{e^{ikr'}}{r'} \underbrace{O\left(\frac{1}{r'^2}\right) r'^2 d\Omega'}_{O(1)} \xrightarrow{r' \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{qed}$$

Analog für $A_{cj}(\vec{r})$.

Kirchhoffsche Näherung für $\varphi_c(\vec{r})$, $\vec{A}_c(\vec{r})$

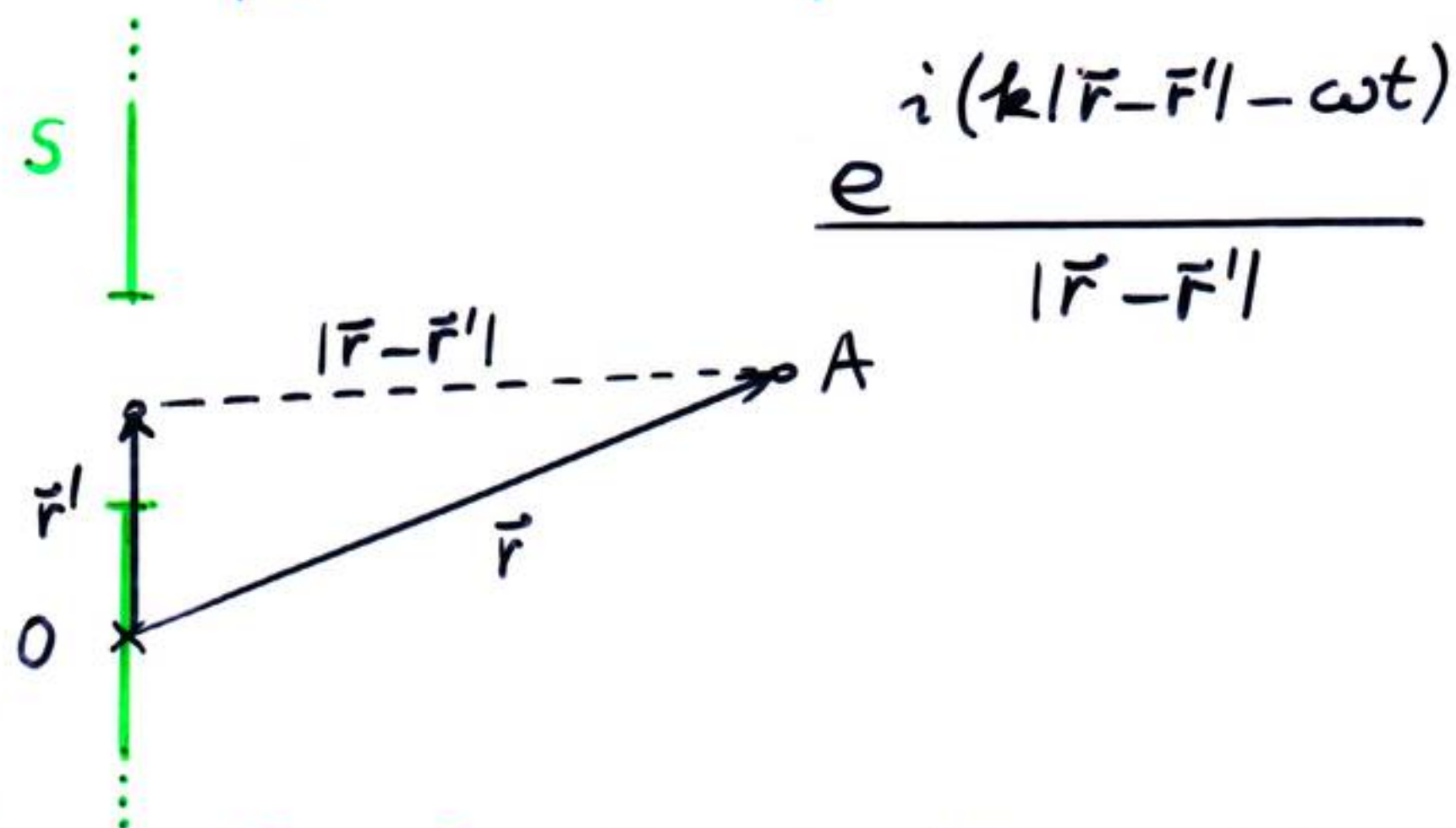
(\vec{r} Aufpunkt "hinter dem Schirm S")

$$\varphi_c(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_F \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\cancel{\text{grad}' \varphi_c^{(e)}(\vec{r}')} + 2ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \varphi_c^{(e)}(\vec{r}') \right] \cdot d\vec{r}'$$

$$A_{cj}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_F \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \sum_{l=1}^3 \left[\cancel{\frac{\partial A_{cj}^{(e)}(\vec{r}')}{\partial x'_l}} + 2ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{x_e - x'_e}{|\vec{r}-\vec{r}'|} A_{cj}^{(e)}(\vec{r}') \right] df'_e$$

Problem im Prinzip "gelöst", aber....!

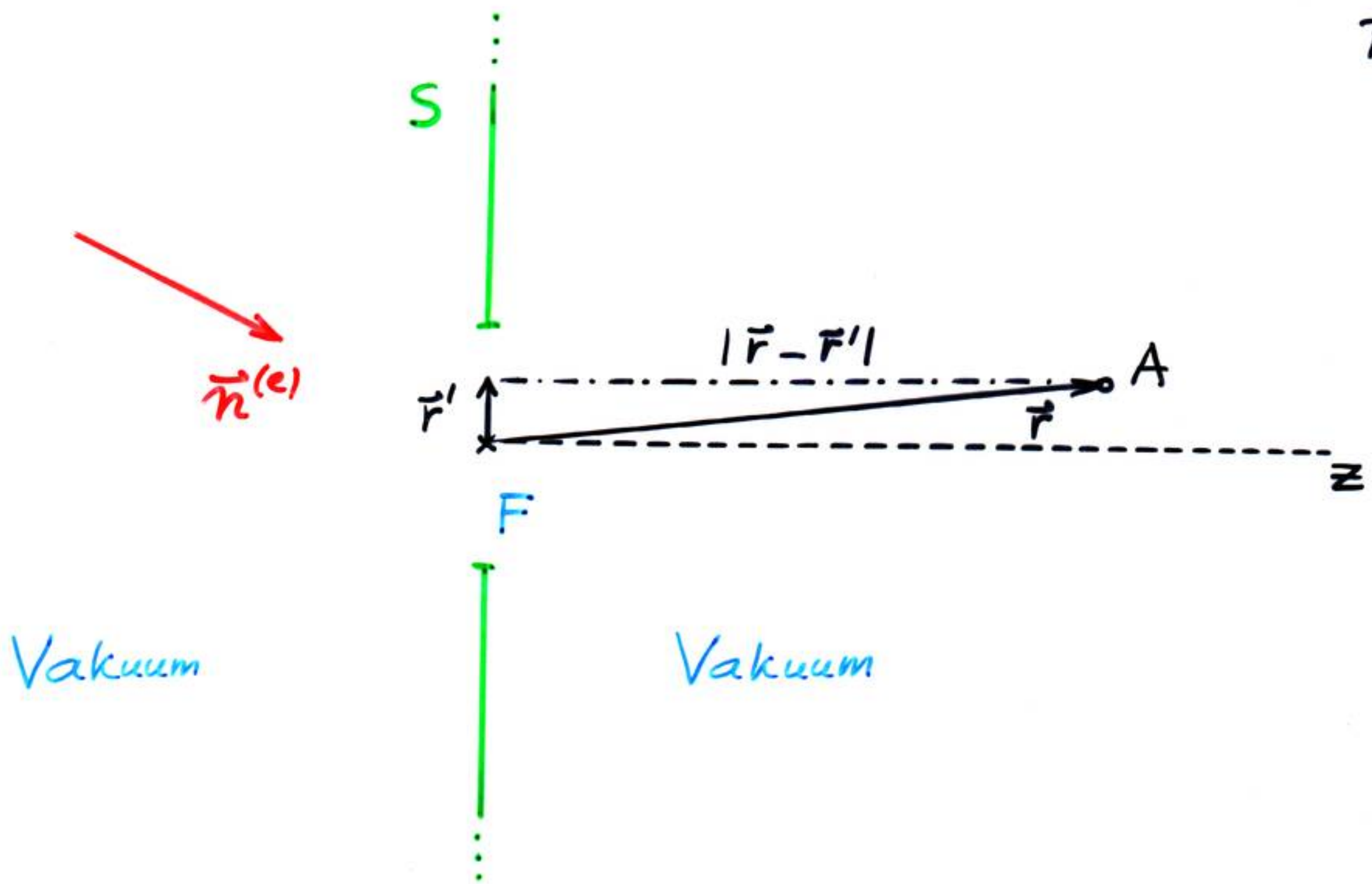
Bemerkung 1: Huygenssches Prinzip



Bemerkung 2: ~~1~~, 2 Formeln für modifizierte

Kirchhoffsche Beugungstheorie (mit Dirichletscher Greenfunktion statt Greenfunktion für natürliche RB);

s. JACKSON S'508 ff



einfallendes Wellenfeld sei **linear polarisierte monochromatische ebene Welle**

$$\underline{\vec{E}_c^{(e)}(\vec{r}) = \vec{a} e^{ik \vec{n}^{(e)} \cdot \vec{r}}}$$

$$\underline{\vec{B}_c^{(e)}(\vec{r}) = \vec{n}^{(e)} \times \vec{E}_c^{(e)}(\vec{r})}$$

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad \vec{k} = k \vec{n}^{(e)}$$

$$\underline{\vec{a} = \vec{e} E_0^{(e)} e^{i\delta^{(e)}}$$

$$\vec{e} \cdot \vec{n}^{(e)} = 0$$

Aufg.

(24): $\varphi_c^{(e)}(\vec{r}) \equiv 0, \quad \vec{A}_c^{(e)}(\vec{r}) = \frac{1}{ik} \vec{a} e^{ik \vec{n}^{(e)} \cdot \vec{r}}$

erfüllen homogene Helmholtzgl. + Lorenzbedingung
und ergeben $\vec{E}_c(\vec{r}), \vec{B}_c(\vec{r})$ von oben

$$\varphi_c(\vec{r}) = 0$$

$$A_{cj}^{(e)}(\vec{r}') = \frac{1}{ik} a_j e^{ik\vec{n}^{(e)} \cdot \vec{r}'}$$

$$A_{cj}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_F \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \sum_{l=1}^3 \left[\frac{\partial A_{cj}^{(e)}(\vec{r}')}{\partial x'_l} \right]$$

$$\underline{a_j n_l^{(e)}} e^{ik\vec{n}^{(e)} \cdot \vec{r}'}$$

$$+ \cancel{ik} \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{x_l - x'_l}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underline{A_{cj}^{(e)}(\vec{r}')} \underline{df'_l}$$

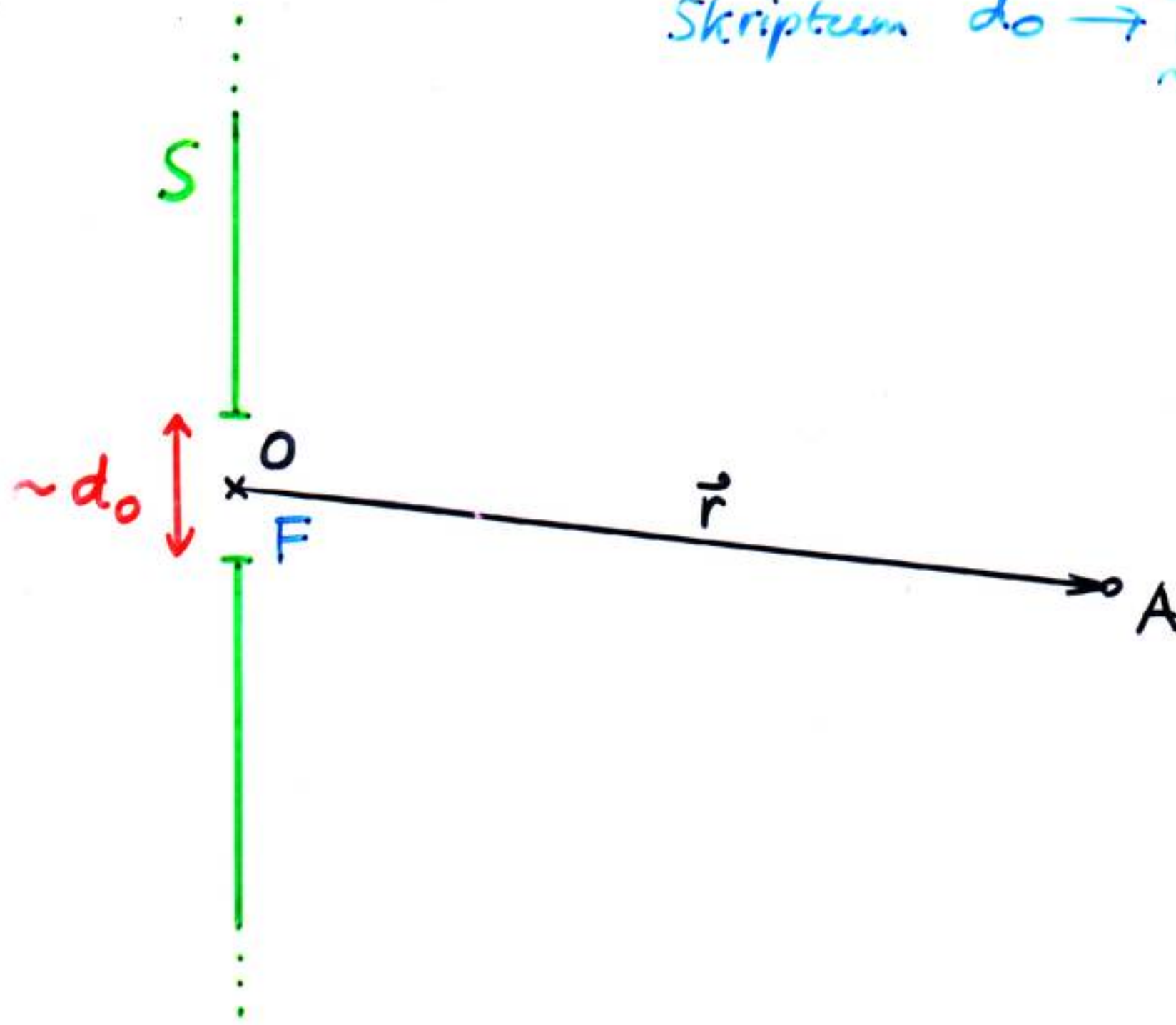
$$\cancel{\frac{1}{ik}} \underline{a_j} e^{ik\vec{n}^{(e)} \cdot \vec{r}'}$$

$$\vec{A}_c(\vec{r}) = \vec{a} \frac{1}{4\pi} \int_F \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\cancel{\vec{n}^{(e)}} \right]$$

$$+ 2 \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left] e^{ik\vec{n}^{(e)} \cdot \vec{r}'} \cdot d\vec{f}'$$

$$-\vec{e}_z dx' dy'$$

im Integranden ist $z'=0$
zu setzen ($\vec{r}' \in F$)



VS. für Anwendbarkeit der Kirchhoffschen "Rezepte"

$$\underline{d_0 \gg \lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

"NAHZONE" $r \lesssim \lambda \ll d_0$ Kirchhoff "theorie" nicht brauchbar

"MITTELZONE" $\lambda \ll r \sim d_0$ Integrale nicht auswertbar

"FERNZONE" $\lambda \ll d_0 \ll r$ Fresnelbeugung, wenn d_0 nicht $\lll r$

"FERNE FERNZONE"

$$\underline{\lambda \ll d_0 \lll r}$$

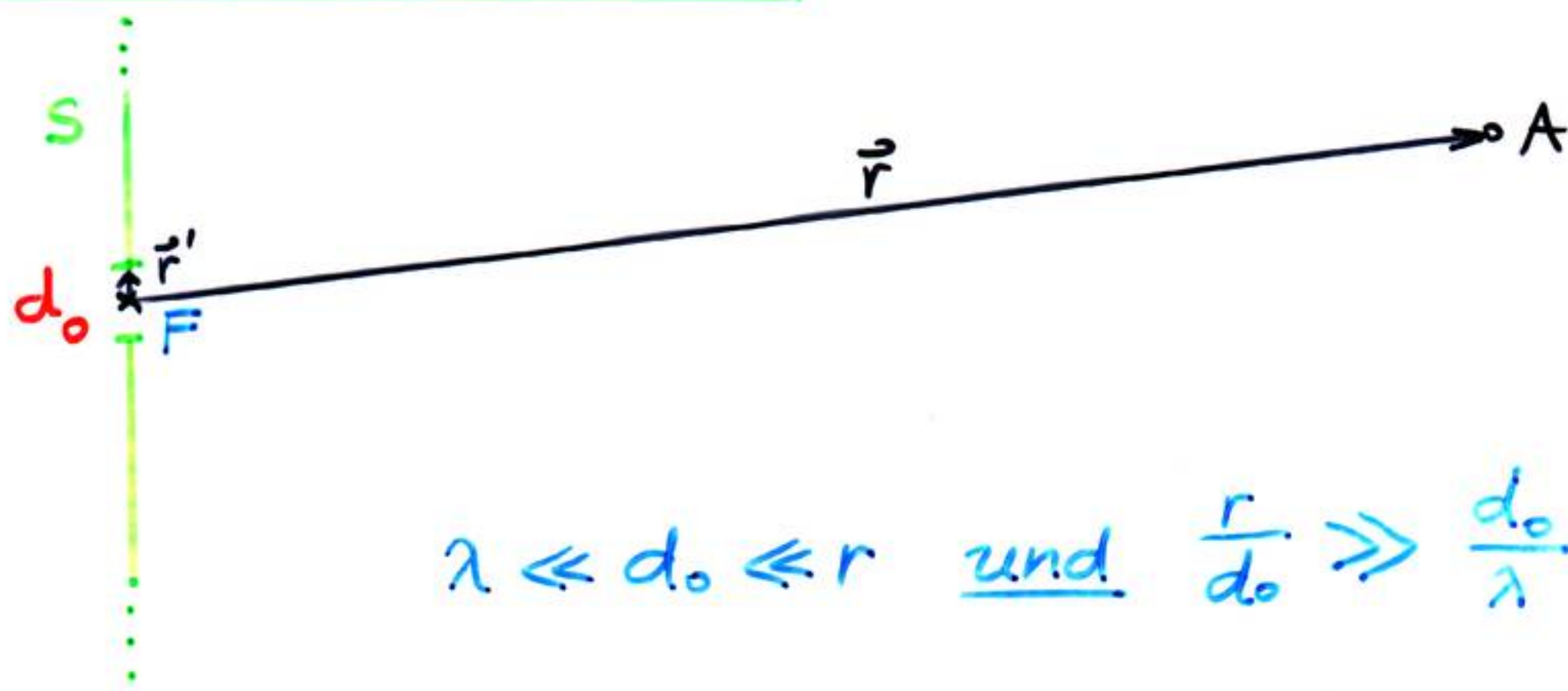
Fraunhoferbeugung

d.h.

$$\lambda \ll d_0 \ll r \text{ und } \frac{d_0}{r} \ll \frac{\lambda}{d_0}$$

d.h.

$$\underline{1 \ll \frac{d_0}{\lambda} \ll \frac{r}{d_0}}$$

FRAUNHOFERBEUGUNG

$$\lambda \ll d_0 \ll r \quad \text{und} \quad \frac{r}{d_0} \gg \frac{d_0}{\lambda}$$

z.B.: $\lambda = 6000 \text{ \AA} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$

$d_0 = 10^{-2} \text{ cm} = 0,1 \text{ mm}$

$r = 50 \text{ cm}$

$\frac{d_0}{\lambda} = 167$

$\frac{r}{d_0} = 5000,$

$\Rightarrow \frac{d_0}{r} = 2 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\lambda}{d_0} = 6 \cdot 10^{-3}$

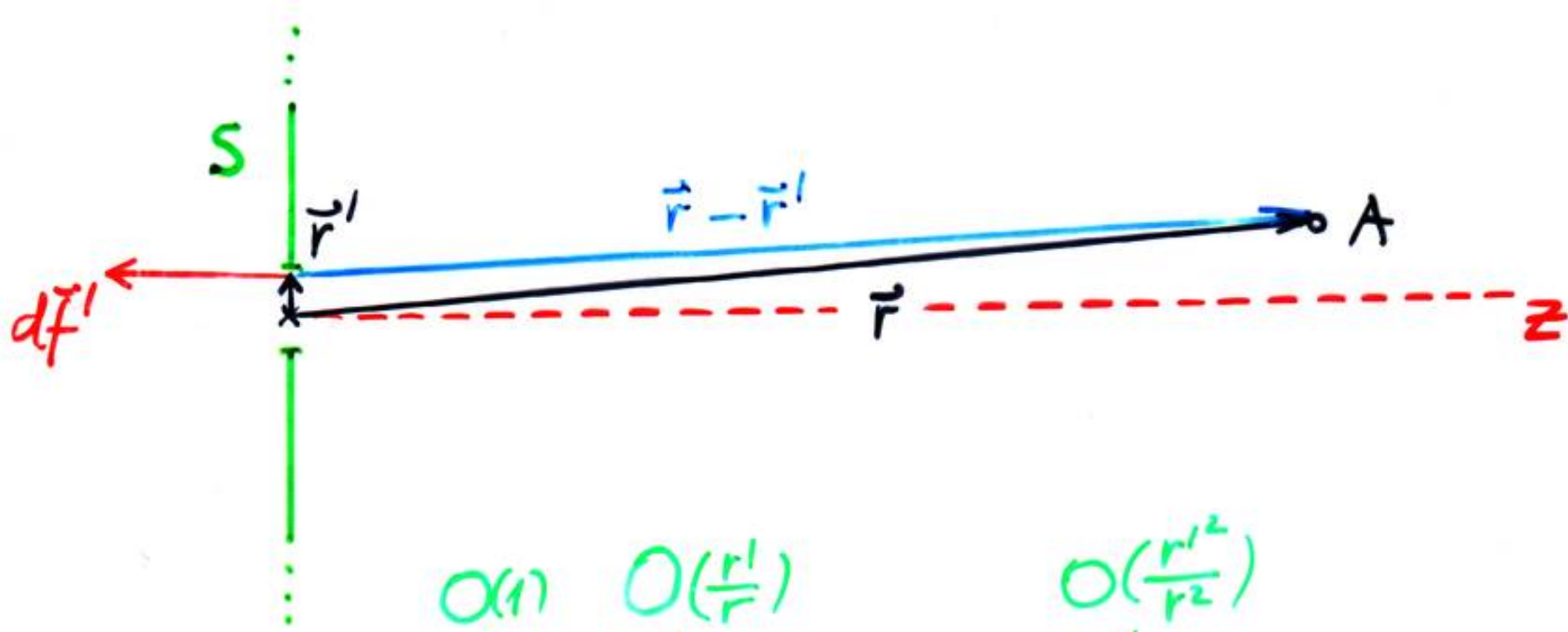
$|\vec{r} - \vec{r}'|$ für $\vec{r}' \in F$ und \vec{r} in "FERNER FERNZONE"
entwickelt

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}$$

$$= r \sqrt{1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}$$

$$= r \left[1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r^2 r'^2 - (\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2r^4} + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right) \right]$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$



$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r \left[1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r^2 r'^2 - (\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2r^4} + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right) \right]$$

$\alpha(1)$ $O\left(\frac{r'}{r}\right)$ $O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)$

FRAUNHOFERBEUGUNG

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \ll d_0 \lll r$$

$$\Rightarrow kr \gggg 1 \quad (\text{im Zahlenbeispiel: } kr \approx 5 \cdot 10^6)$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{r}' \approx \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r}'$$

$$1 + \frac{i}{k|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx 1 + \frac{i}{kr} \approx 1$$

$$e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx e^{ikr} \cdot e^{-ik\left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}'\right)}$$

← s. später

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r \left[1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r^2 r'^2 - (\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2r^4} + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right) \right]$$

$$e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} = e^{ikr} \cdot e^{-ik\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}\right)} \cdot e^{ik\frac{r^2 r'^2 - (\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2r^3}} \dots$$

$\xrightarrow{\text{Fraunhofer}}$ $\xrightarrow{\text{Fresnel}}$

$$e^{i(\alpha + \beta + \gamma + \dots)}$$

$$kr \gg \gg \gg 1$$

im Beispiel 167π

$$\left| k\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}\right) \right|_{\max} \sim \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d_0}{2} \gg \pi$$

$\cos^2(\angle \vec{r}, \vec{r}')$

$$k \frac{r^2 r'^2 - (\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2r^3} = \frac{kr'^2}{2r} \underbrace{\left[1 - \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r r'}\right)^2 \right]}_{\sin^2(\angle \vec{r}, \vec{r}')}$$

$$\leq \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d_0^2}{2r \cdot 4} = \frac{\pi}{4} \frac{d_0}{\lambda} \frac{d_0}{r} = \frac{\pi}{4} \frac{\frac{d_0}{\lambda}}{\frac{r}{d_0}}$$

$$\left| k \frac{r^2 r'^2 - (\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2r^3} \right|_{\max} \ll \frac{\pi}{4}$$

$\ll 1$

im Beispiel 1°

im Beispiel $3 \cdot 10^{-2}$

$$\vec{A}_c(\vec{r}) = \vec{a} \frac{1}{4\pi} \int_F \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\cancel{\vec{n}^{(e)}} \right]$$

$$\approx \frac{e^{ikr}}{r} \underbrace{e^{-ik(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}')}}_{\text{wavy line}}$$

$$+ 2 \underbrace{\left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)}_{\approx 1} \underbrace{\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\text{wavy line}} \left[e^{ik\vec{n}^{(e)} \cdot \vec{r}'} \cdot d\vec{f}' \right]$$

$$\approx \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{f}' = -\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{e}_z df'$$

$$\vec{A}_c(\vec{r}) = -\vec{a} \left[\cancel{\vec{n}^{(e)}} + 2 \frac{\vec{r}}{r} \right] \cdot \vec{e}_z \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \cdot \iint_F dx' dy' \left[e^{ik(\vec{n}^{(e)} - \frac{\vec{r}}{r}) \cdot \vec{r}'} \right]_{z'=0}$$

KONSISTENZ MIT
KIRCHHOFFANNAHME
(III)!

$$\cdot \iint_F dx' dy' \left[e^{ik(\vec{n}^{(e)} - \frac{\vec{r}}{r}) \cdot \vec{r}'} \right]_{z'=0}$$

abhängig von x, y, z !

$$\vec{n}^{(e)} = : (\alpha, \beta, \gamma) \quad , \quad \frac{\vec{r}}{r} = : (\alpha', \beta', \gamma')$$

z.B.

$$\alpha' = \frac{x}{r}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\Rightarrow \left[\cancel{\vec{n}^{(e)}} + 2 \frac{\vec{r}}{r} \right] \cdot \vec{e}_z = \cancel{\gamma} + 2\gamma'$$

$$\left. (\vec{n}^{(e)} - \frac{\vec{r}}{r}) \cdot \vec{r}' \right|_{z'=0} = (\alpha - \alpha')x' + (\beta - \beta')y'$$

$$\vec{A}_c(\vec{r}) = -\vec{a} \left[\cancel{\vec{n}^{(e)}} + 2 \frac{\vec{r}}{r} \right] \cdot \vec{e}_z \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \cdot$$

$$(\cancel{\gamma} + 2\gamma')$$

$$\vec{e} E_0^{(e)} e^{i\delta^{(e)}}$$

$$\cdot \iint_F dx' dy' \left[e^{ik(\vec{n}^{(e)} - \frac{\vec{r}}{r}) \cdot \vec{r}'} \right]_{z'=0}$$

$$e^{ik[(\alpha - \alpha')x' + (\beta - \beta')y']}$$

$$\varphi_c(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{A}_c(\vec{r}) = -\vec{e} E_0^{(e)} \frac{e^{i[kr + \delta^{(e)}]}}{4\pi r} (\cancel{\gamma} + 2\gamma') \cdot$$

$$\cdot A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')$$

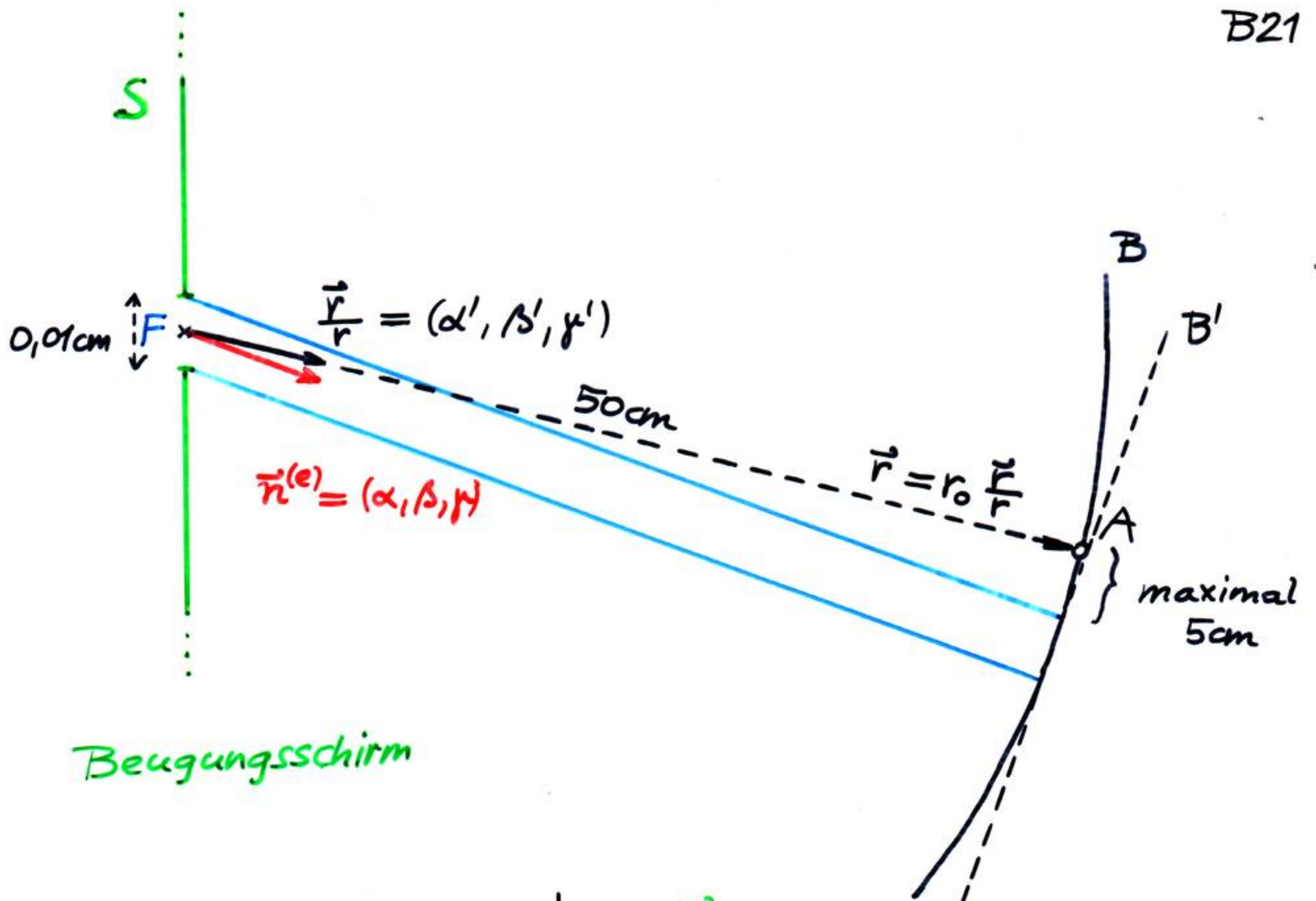
mit der Interferenzfunktion

$$A(\alpha - \alpha', \beta - \beta') := \iint_F dx' dy' e^{ik[(\alpha - \alpha')x' + (\beta - \beta')y']}$$

$$\vec{n}^{(e)} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\frac{\vec{r}}{r} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = (\alpha', \beta', \gamma')$$

Integrale lassen sich für einfache Öffnungen (Rechteck, Kreis etc.) auf tabellierte Funktionen zurückführen



$$I(r_0 \frac{\vec{r}}{r}) = \left| \overline{\vec{S}(\vec{r}, t)} \right|_{|\vec{r}|=r_0} \quad *)$$

$$= \frac{c}{8\pi} \left| \text{Re} [\vec{E}_c(\vec{r}) \times \vec{B}_c^*(\vec{r})] \right|_{|\vec{r}|=r_0}$$

$$\vec{A}_c(\vec{r}) = -\vec{e} E_0^{(e)} \frac{e^{i[kr + \delta^{(e)}]}}{4\pi r} (\cancel{\gamma} + 2\gamma') A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')$$

$$\vec{E}_c(\vec{r}) = ik \vec{A}_c(\vec{r}) \quad (\varphi_c(\vec{r}) = 0 !)$$

$$\vec{B}_c^*(\vec{r}) = \text{rot} \vec{A}_c^*(\vec{r})$$

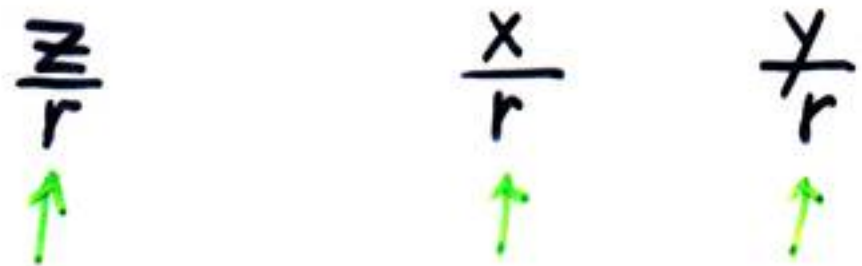
*) früher bewiesen:

$$\overline{\vec{S}(\vec{r}, t)} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\vec{E}_c(\vec{r}) \times \vec{B}_c^*(\vec{r})]$$

"Auffänger"
(z.B. Film)

$$\vec{A}_c^*(\vec{r}) = -\vec{e} E_0^{(e)} \frac{e^{-i[kr + \delta^{(e)}]}}{4\pi r} (\cancel{\gamma} + 2\gamma') A^*(\alpha - \alpha', \beta - \beta')$$

$$\frac{\partial}{\partial x} r = \frac{x}{r} \dots$$



$$\begin{aligned} \text{rot}(-e^{-ikr} \vec{e}) &= \vec{\nabla} \times (-e^{-ikr} \vec{e}) \\ &= -\underbrace{\text{grad } e^{-ikr}}_{-ik e^{-ikr}} \times \vec{e} \end{aligned}$$

$$\text{rot}(-e^{-ikr} \vec{e}) = ik \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{e} \right) e^{-ikr}$$

$$\vec{E}_c(\vec{r}) = -\vec{e} E_0^{(e)} \frac{e^{i[kr + \delta^{(e)}]}}{4\pi r} ik (\cancel{\gamma} + 2\gamma') A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')$$

$$\vec{B}_c^*(\vec{r}) = \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{e} \right) E_0^{(e)} \frac{e^{-i[kr + \delta^{(e)}]}}{4\pi r} ik (\cancel{\gamma} + 2\gamma') A^*(\alpha - \alpha', \beta - \beta')$$

$$\vec{E}_c(\vec{r}) \times \vec{B}_c^*(\vec{r}) = k^2 E_0^{(e)2} \frac{1}{(4\pi r)^2} (\cancel{\gamma} + 2\gamma')^2 [\vec{e} \times \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{e} \right)] \cdot$$

reell

$$\cdot |A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')|^2$$

$$I(r_0 \frac{\vec{r}}{r}) = \frac{ck^2 E_0^{(e)2}}{8\pi} \frac{1}{(4\pi r_0)^2} (\cancel{\gamma} + 2\gamma')^2 |\vec{e} \times \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{e} \right)| \cdot$$

$$\cdot |A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')|^2$$

$$\frac{\vec{r}}{r} = (\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, \cos\vartheta)$$



$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

B23

$$|\vec{e} \times (\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{e})| = |\frac{\vec{r}}{r} \underbrace{(\vec{e} \cdot \vec{e})}_1 - \vec{e} (\vec{e} \cdot \frac{\vec{r}}{r})|$$

$$= \sqrt{(\frac{\vec{r}}{r} - \vec{e} (\vec{e} \cdot \frac{\vec{r}}{r}))^2}$$

$(\alpha', \beta', \gamma')$

$$= \sqrt{1 - (\vec{e} \cdot \frac{\vec{r}}{r})^2}$$

$$I(r_0 \frac{\vec{r}}{r}) = \frac{\underbrace{\tau k^2 E_0^{(e)2}}_{I^{(e)}}}{8\pi} \frac{1}{(4\pi r_0)^2} (\cancel{\gamma} + 2\gamma')^2 \sqrt{1 - (\vec{e} \cdot \frac{\vec{r}}{r})^2} \cdot |A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')|^2$$

(α, β, γ)

$$I(r_0 \vec{n}^{(e)}) = \frac{\tau k^2 E_0^{(e)2}}{8\pi} \frac{1}{(4\pi r_0)^2} (2\gamma)^2 |A(0,0)|^2$$

$$\frac{I(r_0 \frac{\vec{r}}{r})}{I(r_0 \vec{n}^{(e)})} = \left(\frac{\cancel{\gamma} + 2\gamma'}{2\gamma} \right)^2 \sqrt{1 - (\vec{e} \cdot \frac{\vec{r}}{r})^2} \left| \frac{A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')}{A(0,0)} \right|^2$$

Von $I^{(e)}$
unabhängig
("große"
Photonenzahlen!)

ist für jene Richtungen

$\frac{\vec{r}}{r} = (\alpha', \beta', \gamma')$, für

welche

merklich von null

verschieden ist

$(\frac{\vec{r}}{r} \approx \vec{n}^{(e)})$

praktisch

1

erhält man auch
aus der skalaren
Kirchhofftheorie"
bzw. mit Hilfe
des Huygensschen
Prinzips

Aufg. (25), (26) !

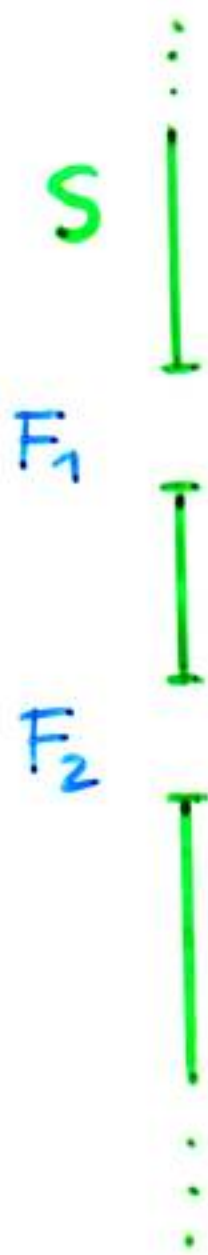
$$\frac{I(r_0 \frac{\vec{r}}{r})}{I(r_0 \vec{n}^{(e)})} = \left| \frac{A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')}{A(0,0)} \right|^2 \quad \text{für } \frac{\vec{r}}{r} \approx \vec{n}^{(e)}$$

mit

$$A(\alpha - \alpha', \beta - \beta') = \iint_F dx' dy' e^{ik[(\alpha - \alpha')x' + (\beta - \beta')y']}$$

$$A(0,0) = \iint_F dx' dy' = \text{Flächeninhalt der Öffnung} \\ \text{(Summe der Flächeninhalte der Öffnungen)}$$

$A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')$ "Interferenzfunktion"



$$A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')$$

$$= \iint_{F_1} dx' dy' e^{ik[(\alpha - \alpha')x' + (\beta - \beta')y']}$$

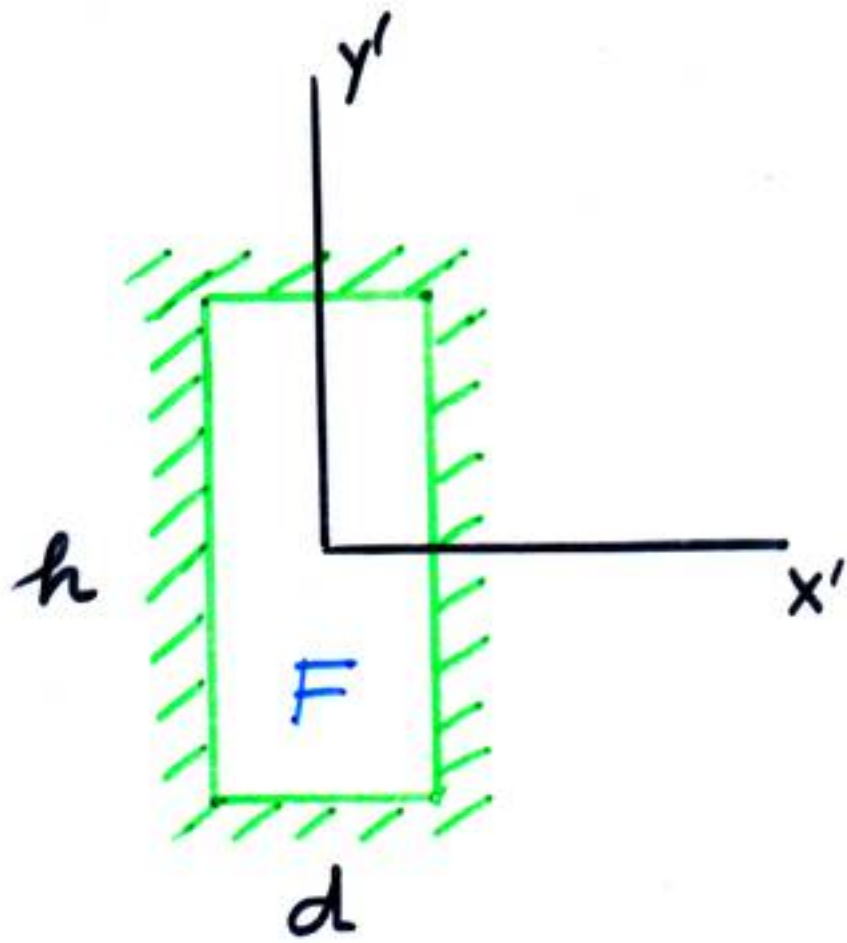
$$=: A_1(\alpha - \alpha', \beta - \beta')$$

$$+ \iint_{F_2} dx' dy' e^{ik[(\alpha - \alpha')x' + (\beta - \beta')y]}$$

$$=: A_2(\alpha - \alpha', \beta - \beta')$$

$$I = f |A|^2 = f |A_1 + A_2|^2 = f |A_1|^2 + f |A_2|^2 + 2f \operatorname{Re}(A_1^* A_2) \\ = I_1 + I_2 + \text{Interferenzterm}$$

Rechteckspalt

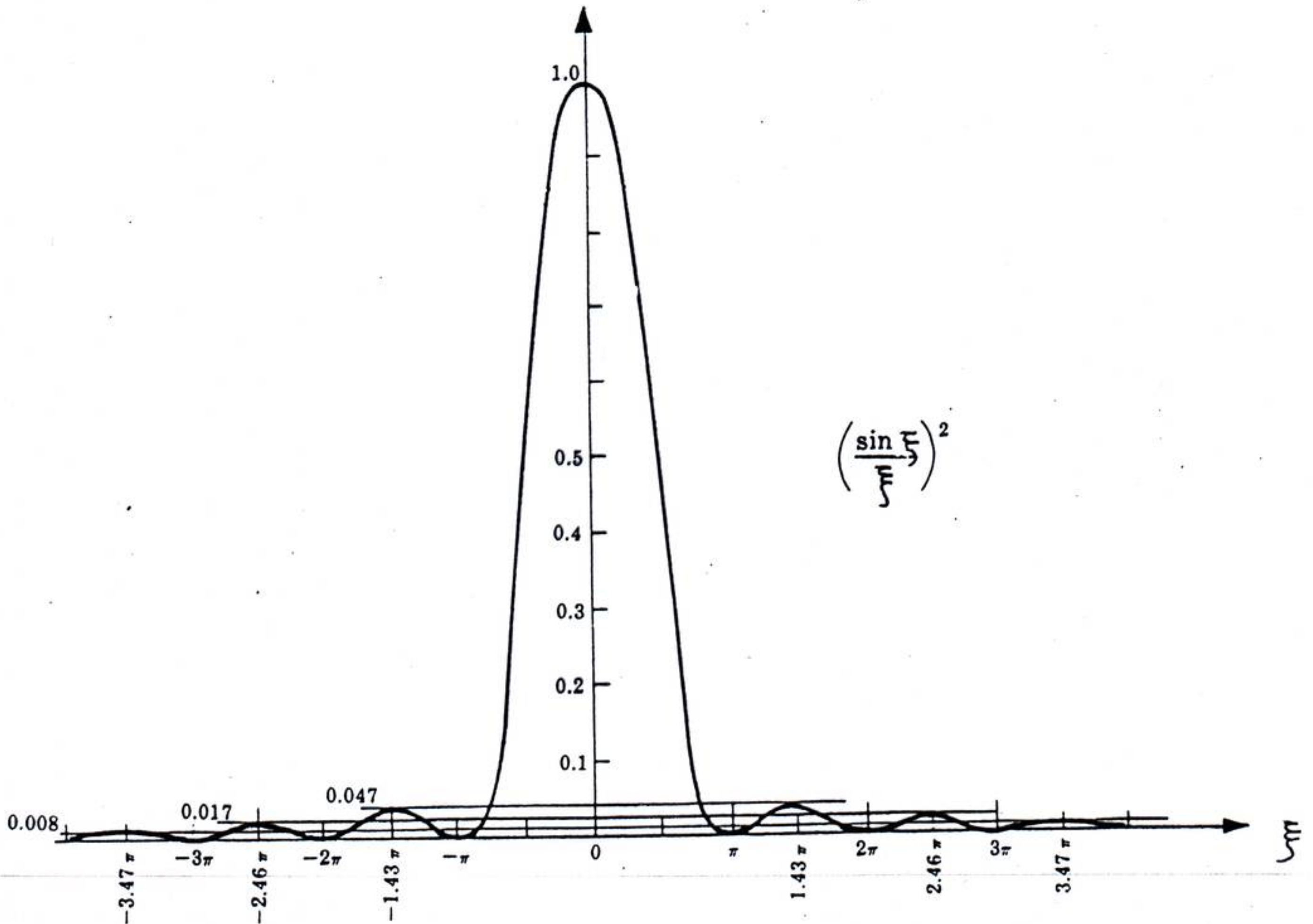


Für Diskussion

$$\vec{n}^{(e)} = (0, 0, 1) \text{ gesetzt.}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 α β γ

$$\left[\frac{I(r_o \vec{r}_F)}{I(r_o \vec{n}^{(e)})} \right]_{\text{Spalt}} = \left[\frac{\sin \frac{kd(\alpha - \alpha')}{2}}{\frac{kd(\alpha - \alpha')}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{kh(\beta - \beta')}{2}}{\frac{kh(\beta - \beta')}{2}} \right]^2$$

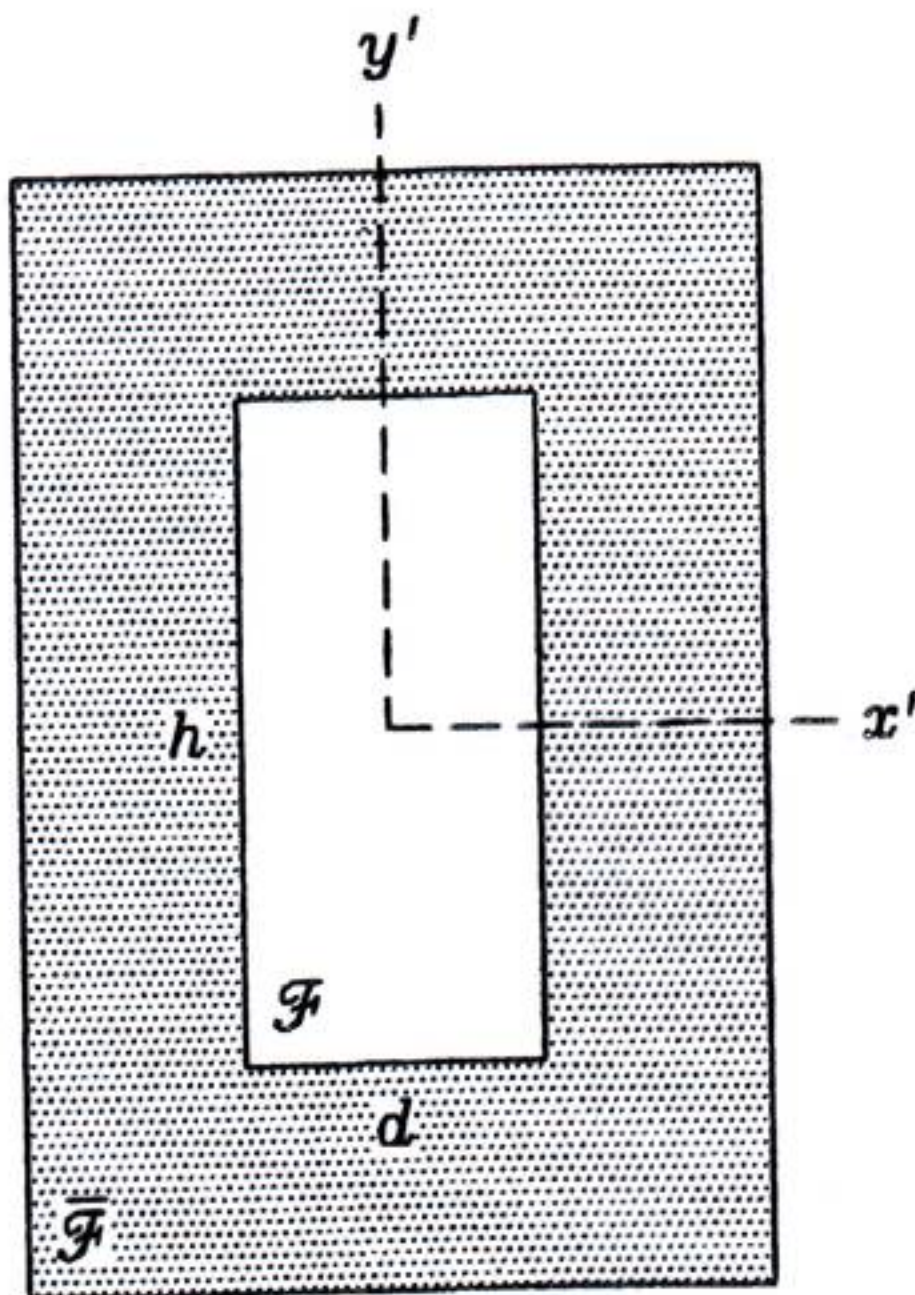


Rechteckspalt (s. Abb. 2.40): Mit $A(0,0) = dh$ und

$$\begin{aligned}
 A(\alpha - \alpha', \beta - \beta') &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dx' e^{ik(\alpha - \alpha')x'} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy' e^{ik(\beta - \beta')y'} \\
 &= \frac{\sin \frac{kd(\alpha - \alpha')}{2}}{\frac{k(\alpha - \alpha')}{2}} \frac{\sin \frac{kh(\beta - \beta')}{2}}{\frac{k(\beta - \beta')}{2}}
 \end{aligned}$$

folgt

$$\frac{I(r_0 \frac{\vec{r}}{r})}{I(r_0 \vec{n}(e))} = \left[\frac{\sin \frac{kd(\alpha - \alpha')}{2}}{\frac{kd(\alpha - \alpha')}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{kh(\beta - \beta')}{2}}{\frac{kh(\beta - \beta')}{2}} \right]^2$$



Beispiel: $\vec{n}^{(e)} = (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$

(25)

$$\lambda = 6 \cdot 10^{-5} \text{ cm}, \quad d = 10^{-2} \text{ cm}, \quad r_0 = 50 \text{ cm}$$

1. Minimum in x-Richtung ($y=0$, d.h. $\beta'=0$)

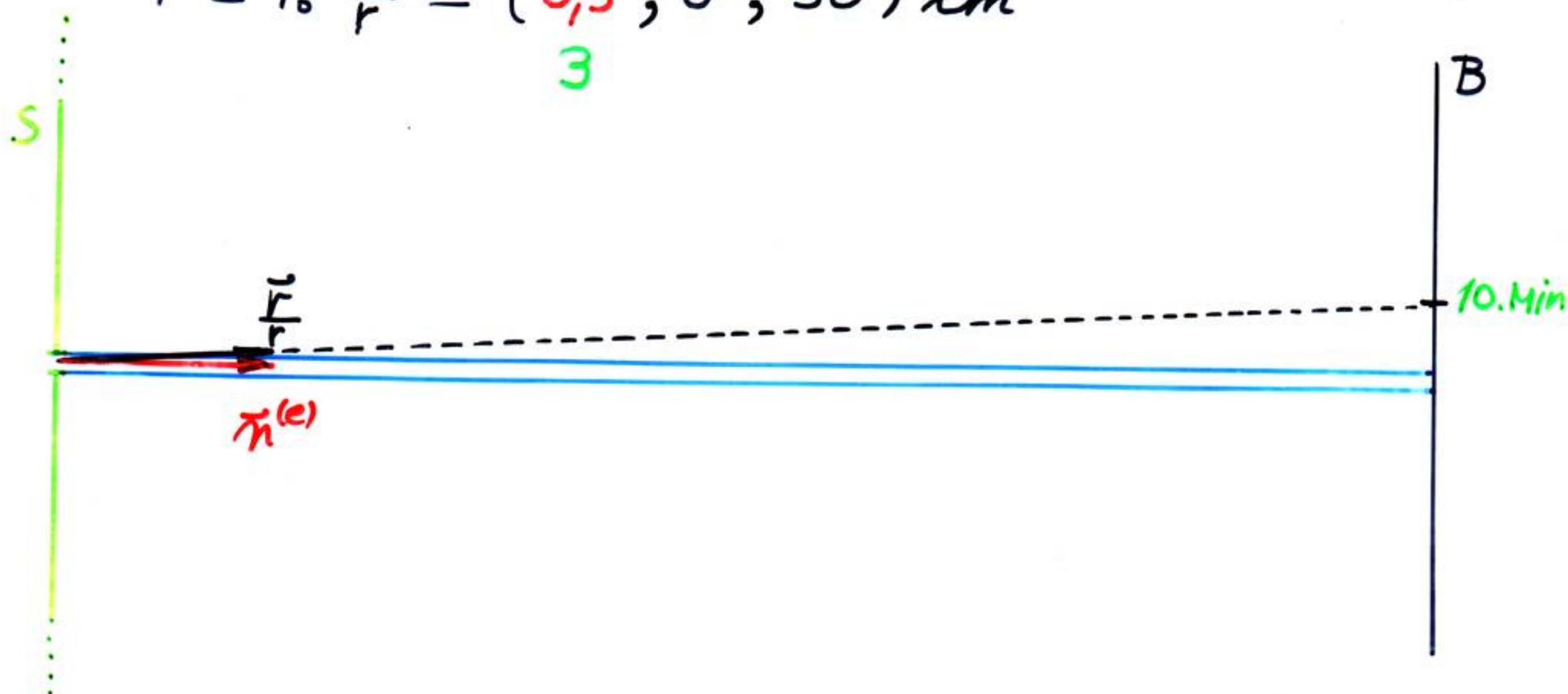
10.

$$m = \frac{k d \alpha'}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d \alpha' = \underset{10}{1} \pi \Rightarrow \alpha' = \underset{10}{1} \frac{\lambda}{d} = \underset{0,06}{0,006}$$

$$\frac{r'}{r} = (\alpha', 0, \gamma'), \quad \gamma' = \sqrt{1 - \alpha'^2} = \underset{0,9982}{0,999982}$$

$$\frac{r'}{r} = (\underset{0,06}{0,006}, 0, \underset{0,9982}{0,999982}) \approx \vec{n}^{(e)} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{r}'_0 = r_0 \frac{r'}{r} = (\underset{3}{0,3}, 0, 50) \text{ cm}$$



zentraler heller
Fleck des
Beugungsbildes

direktes Bild
Breite 0,1 mm

1. Min
3 mm

	$\frac{f + f'}{2f}$	$\frac{2f'}{2f}$	$\sqrt{1 - (\vec{e} \cdot \vec{f})^2}$ $\vec{e} = (1, 0, 0)$	für $\vec{e} = (0, 1, 0)$
1. Min	0,9999991	0,9999982	0,9999982	1
10. Min	0,99991	0,99982	0,99982	1

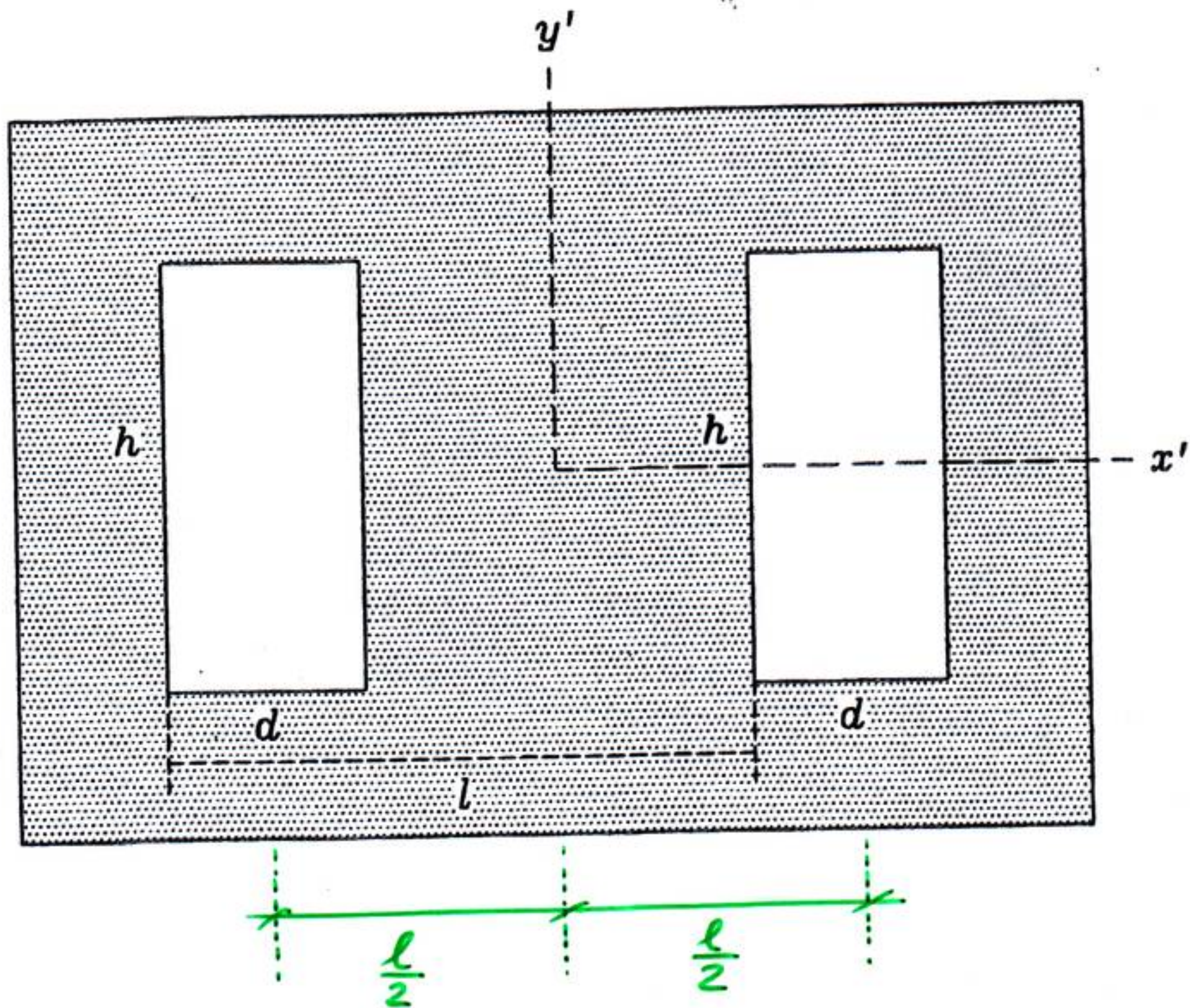
Doppelspalt (s. Abb. 2.43): Mit $A(0,0) = 2dh$ und

$$\begin{aligned}
 A(\alpha - \alpha', \beta - \beta') &= \left[\int_{-\frac{l}{2} - \frac{d}{2}}^{-\frac{l}{2} + \frac{d}{2}} dx' e^{ik(\alpha - \alpha')x'} + \int_{\frac{l}{2} - \frac{d}{2}}^{\frac{l}{2} + \frac{d}{2}} dx' e^{ik(\alpha - \alpha')x'} \right] \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy' e^{ik(\beta - \beta')y'} \\
 &= 2 \cos \frac{kl(\alpha - \alpha')}{2} \underbrace{\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dx e^{ik(\alpha - \alpha')x} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy' e^{ik(\beta - \beta')y'}}_{(A(\alpha - \alpha', \beta - \beta'))_{\text{Spalt}}}
 \end{aligned}$$

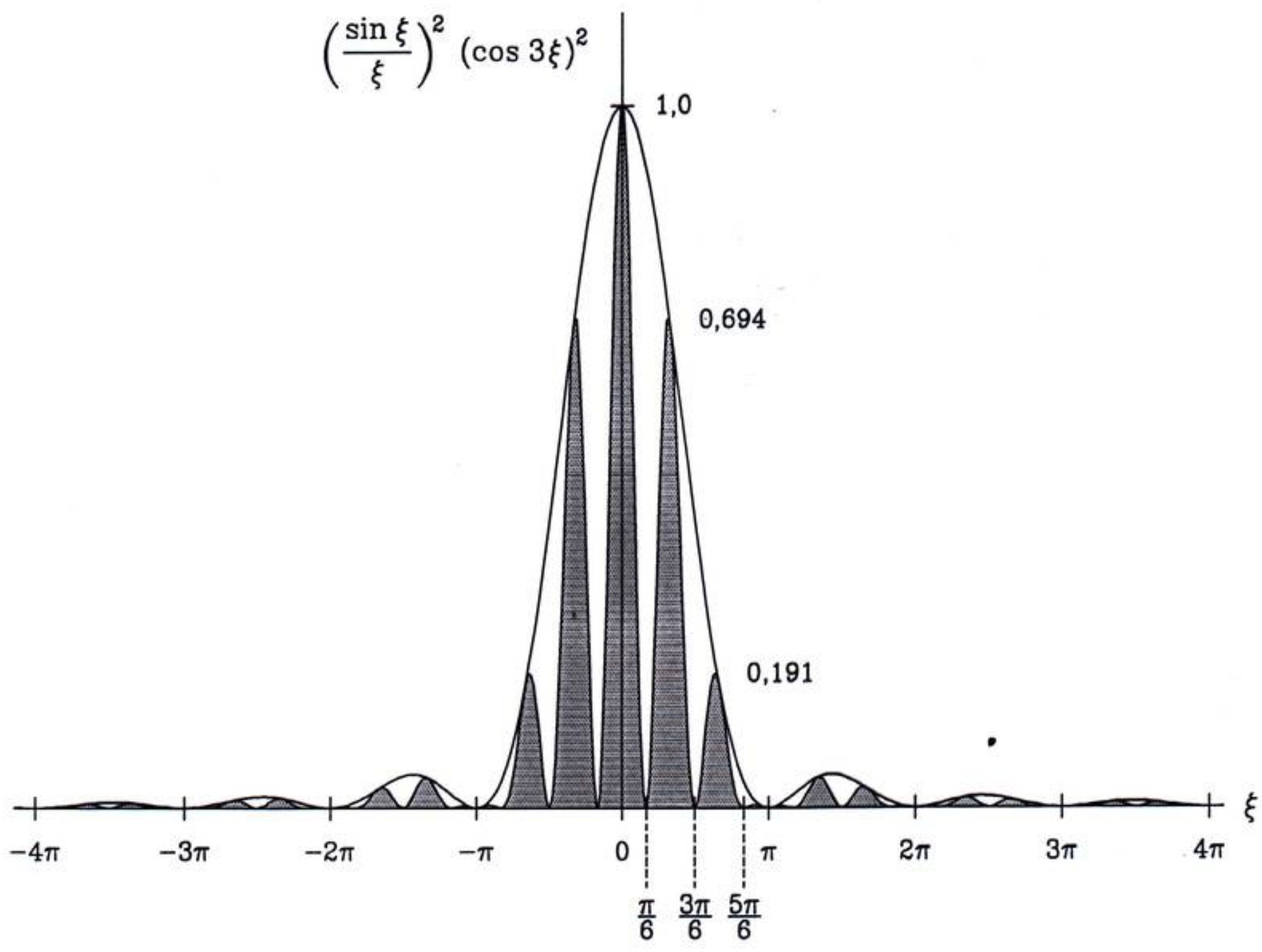
Subst.: $x = x' + \frac{l}{2}$ Subst.: $x = x' - \frac{l}{2}$

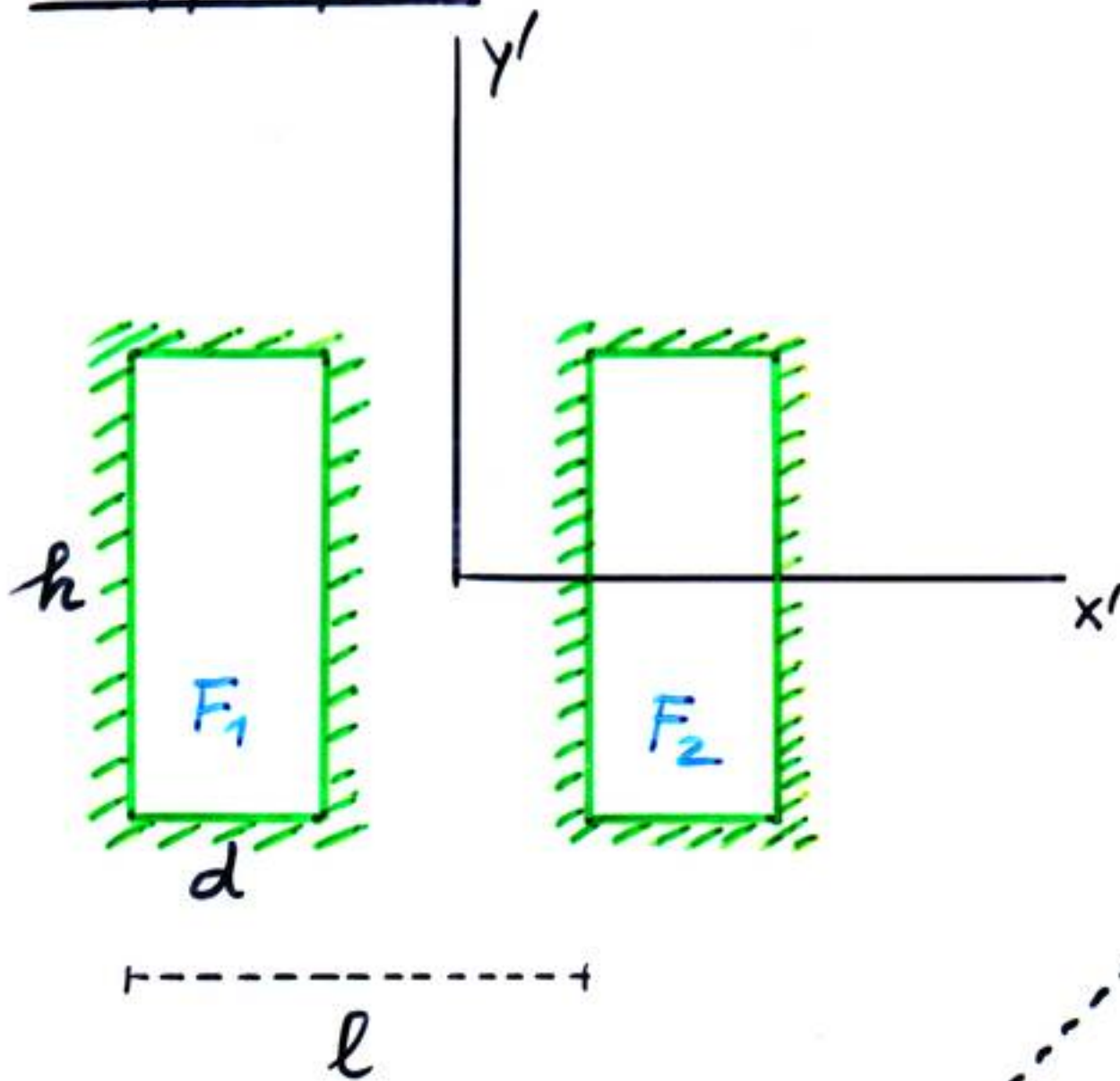
folgt

$$\frac{I(r_0 \frac{\vec{r}}{r})}{I(r_0 \vec{n}^{(e)})} = \left[\frac{I(r_0 \frac{\vec{r}}{r})}{I(r_0 \vec{n}^{(e)})} \right]_{\text{Spalt}} \underbrace{\left(\cos \frac{kl(\alpha - \alpha')}{2} \right)^2}_{\leq 1}$$



$l = 3d$



Doppelspalt

$$\left[\frac{\sin \frac{kd(\alpha - \alpha')}{2}}{\frac{kd(\alpha - \alpha')}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{kh(\beta - \beta')}{2}}{\frac{kh(\beta - \beta')}{2}} \right]^2$$

∴ Hüllkurve für $\beta - \beta'$ fest

$$\left[\frac{I(r_0 \vec{r})}{I(r_0 \vec{n}^{(e)})} \right]_{\text{DSpalt}} = \left[\frac{I(r_0 \vec{r})}{I(r_0 \vec{n}^{(e)})} \right]_{\text{Spalt}} \cdot \underbrace{\left(\cos \frac{kl(\alpha - \alpha')}{2} \right)^2}_{\leq 1}$$

Beispiel: $l = 0,01 \text{ cm}$ (!)

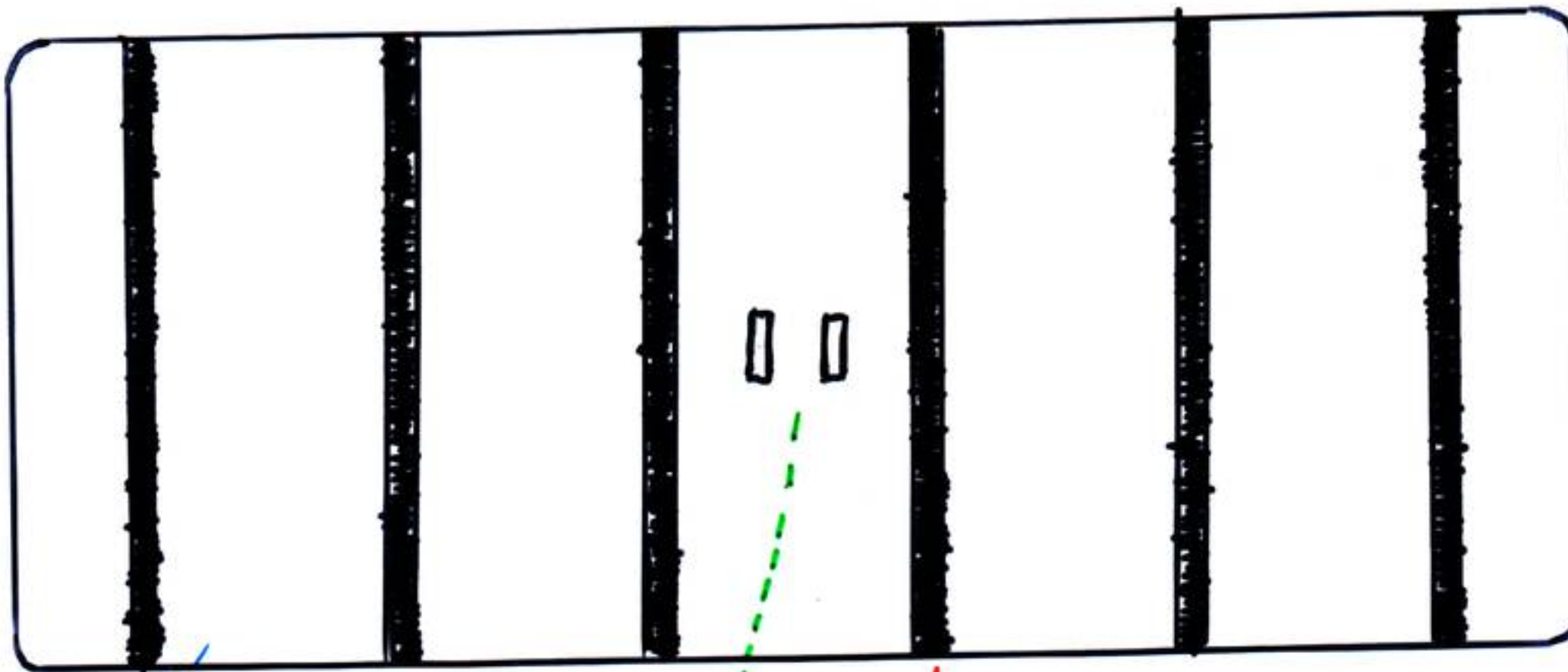
(26) $l = 3d$ alles Übrige wie zuvor

1. Min in x-Richtung ($y = 0$): $\frac{kl\alpha'}{2} = \frac{3kd\alpha'}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
 $[\beta' = 0]$

$$\frac{kd\alpha'}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha' = 0,003, \quad \beta' = 0,9999955$$

$$\frac{\vec{r}}{r} = (0,003, 0, 0,9999955) \approx \vec{n}^{(e)} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{r} = (0,15, 0, 50) \text{ cm}$$



Von dunklen Streifen
Zerteiler
zentraler heller
Fleck des
Beugungsbildes

direktes
Bild
0,03mm
0,1mm

1. Min
1,5mm

9mm
(≡ 4. Min)

h
d