Komplexe separable Hilberträume

(I) Komplexe Vektorräume (komplexe lineare Räume)

$\mathcal{V} = \{f, g, \dots\}$ Menge = komplexer Vektorraum

$f, g, \dots$ Elemente = Vektoren

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Körper der komplexen Zahlen

(1) Abbildung $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$: Vektoraddition

$$\boxed{f, g \in \mathcal{V} \longrightarrow f \oplus g \in \mathcal{V}}$$

(2) Abbildung $\mathbb{C} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$: Multiplikation Zahl mal Vektor

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{V} \longrightarrow \alpha \odot f \in \mathcal{V}}$$

1) $f \oplus g = g \oplus f$

2) $(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$

3) $\exists$ Vektor $\mathbb{O}$ (Nullvektor) : $u \oplus \mathbb{O} = u, \ \forall u \in \mathcal{V}$

4) zu jedem Vektor f $\exists$ inverses Element (Vektor) $(-f)$: $f \oplus (-f) = \mathbb{O}$

5) $\alpha \odot (f \oplus g) = (\alpha \odot f) \oplus (\alpha \odot g)$

6) $(\alpha + \beta) \odot f = (\alpha \odot f) \oplus (\beta \odot f)$

7) $(\alpha \cdot \beta) \odot f = \alpha \odot (\beta \odot f)$

8) $1 \odot u = u, \ \forall u \in \mathcal{V}$

Es folgt dann $(-f) = (-1) \odot f$ und man bezeichnet

$$f \ominus g := f \oplus (-g) = f \oplus [(-1) \odot g]$$

als Vektorsubtraktion.

Bemerkung: In der "Praxis" schreibt man statt
$\oplus \longrightarrow +$ und statt $\ominus \longrightarrow -$ sowie statt
$\odot \longrightarrow \cdot$ (Punkt i.a. sogar "weggelassen");

z.B.: $\alpha \odot (f \oplus g) = (\alpha \odot f) \oplus (\alpha \odot g)$

$\longrightarrow \quad \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$ ●

Beispiele:

(a) $$V = \left\{ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

$$f_i, g_i, \dots \in \mathbb{C}$$

(1) $f \oplus g := \begin{pmatrix} f_1 + g_1 \\ f_2 + g_2 \end{pmatrix}$ (2) $\alpha \odot f := \begin{pmatrix} \alpha f_1 \\ \alpha f_2 \end{pmatrix}$

(b) $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \}$ Beachte: $f(\underset{\in \mathbb{R}}{x}) \in \mathbb{C}$ ●

(1) $(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x)$ (2) $(\alpha \odot f)(x) := \alpha f(x)$

▲

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

$h_1, h_2, \ldots, h_N \in \mathcal{V}$ linear unabhängig (N endlich!) $\Big\}$, wenn $\sum\limits_{\substack{r=1\\ \oplus}}^{N} \alpha_r \odot h_r = \mathbb{0}$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha_r = 0\,, \quad r = 1, 2, \ldots, N$$

Dimension von $\mathcal{V}$

= Maximalzahl der linear unabhängigen Elemente von $\mathcal{V}$, falls diese Zahl endlich ist; gibt es keine endliche derartige Zahl, so nennt man $\mathcal{V}$ unendlich dimensional

Beispiele:

(a) $\dim \mathcal{V} = 2$ (b) $\dim \mathcal{V} = \infty$ ▲

II Unitäre Räume

$\mathcal{V} = \{f, g, \ldots\} = \mathcal{U}$ unitärer Raum

(3) Abbildung $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$: inneres Produkt von Vektoren

$$\boxed{f, g \in \mathcal{U} \longrightarrow \langle f, g \rangle \in \mathbb{C}}$$

1) $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}^+, \ \forall u \in \mathcal{U}, \ u \neq 0$
2) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$
3) $\langle f, \alpha \odot g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$
4) $\langle f, g \oplus h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$

Beachte: 2), 3), 4) $\Rightarrow$

$$\langle \alpha \odot f, g\rangle = \alpha^* \langle f, g\rangle$$

$$\langle u \oplus v, g\rangle = \langle u, g\rangle + \langle v, g\rangle$$

s. Aufg. 27

Bemerkung: Das innere Produkt ist also linear in bezug auf die 2. Position, aber antilinear in bezug auf die 1. Position. ●

Ab hier: $\oplus \to +$, $\odot \to \cdot$ geschrieben!

Satz: Schwarzsche Ungleichung

$$\boxed{|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle \langle g, g\rangle}$$

Beweis mit Hilfe von $\langle f + \beta g, f + \beta g\rangle \geq 0$, $\forall \beta \in \mathbb{C}$

Beispiele:

(a) $\mathcal{U} = \mathbb{C}^2 = \left\{ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \dots \right\}$

$$\langle f, g\rangle := f_1^* g_1 + f_2^* g_2 = \sum_{i=1}^{2} f_i^* g_i$$

(b) $\mathcal{U} = L^2(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \; ; \langle f, f\rangle < +\infty \}$

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} dx\, f^*(x)\, g(x)$$

s. Aufgabe 27

Beachte: Die Zusatzforderung $\langle f, f\rangle < +\infty$, d.h. die Forderung der absoluten quadratischen Integrierbarkeit ($\int_{\mathbb{R}} dx\, |f(x)|^2 < +\infty$) gewährleistet

$|\langle f,g\rangle| < +\infty \,, \forall f,g \in \mathcal{U}$. ▲

Orthogonalität von Vektoren

$$\boxed{f \neq 0 \,,\; h \neq 0 \,,\; \langle f,h\rangle = 0 \overset{D}{\Longleftrightarrow} f,h \text{ orthogonal}}$$

Orthonormalsysteme (ONS)

$\mathbb{I} = \{i\}$ Indexmenge (endlich viele, abzählbar oder nichtabzählbar unendlich viele Elemente i)

$e_i \in \mathcal{U}, \forall i$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \{e_i \,,\, i \in \mathbb{I}\} \\ \text{ONS} \end{array}\right\} \overset{D}{\Longleftrightarrow} \langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk} \,,\; \forall j,k \in \mathbb{I}}$$

Vollständige ONS (VONS) = Basen

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \{e_i \,,\, i \in \mathbb{I}\} \\ \text{VONS in } \mathcal{U} \end{array}\right\} \overset{D}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \{e_i \,,\, i \in \mathbb{I}\} \text{ ONS} \\ \langle e_i, h\rangle = 0,\; \forall i \in \mathbb{I} \Rightarrow h = 0 \end{array}\right.}$$

Satz: Es sei $\dim \mathcal{U} = n$ (endlich). Dann gilt:

(α) Ein ONS $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $e_i \in \mathcal{U}$, ist vollständig in $\mathcal{U}$.

(β) Es gilt der Entwicklungssatz

$$f = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, f \rangle e_i \quad , \forall f \in \mathcal{U}.$$

["Komponentenzerlegung" von f in der Basis E, $\langle e_i, f \rangle$ Entwicklungskoeffizienten (manchmal "Komponenten" genannt, manchmal aber auch $\langle e_i, f \rangle e_i$ als "Komponenten" bezeichnet)]

Bemerkungen: 1) In einem unitären Raum kann durch

$$\| f \| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

eine Norm eingeführt werden, wodurch der betreffende Vektorraum auch zu einem normierten Vektorraum (Vektorraum mit Norm) wird.

Ferner kann durch

$$d(f, g) := \sqrt{\langle f-g, f-g \rangle} = \| f - g \|$$

ein Abstandsbegriff eingeführt werden, wodurch der Vektorraum zu einem metrischen Raum wird.

2) Das Analogon zu den unitären Räumen bei den reellen Vektorräumen sind die euklidischen Räume. ●

III (Komplexe) Hilberträume

$\mathcal{U} = \{f, g, \dots\} = \mathcal{H}$ Hilbertraum

(4) $\mathcal{H}$ ist vollständig in der Norm $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$,

d.h. daß jede Folge $h_1, h_2, \dots, h_i \in \mathcal{H}$, mit der Eigenschaft

$$\lim_{\nu,\mu \to \infty} \|h_\nu - h_\mu\| = 0 \quad \text{(Cauchyfolge)}$$

im Sinne von

$$\lim_{\nu \to \infty} \|h_\nu - h\| = 0$$

gegen ein Element $h \in \mathcal{H}$ konvergiert.

Satz: Jeder endlich dimensionale unitäre Raum ist ein (komplexer) Hilbertraum.

Beispiele: (a) $\mathbb{C}^2$ ist ein Hilbertraum

(b) $L^2(\mathbb{R})$ ist unendlich dimensional, aber ebenfalls vollständig in der Norm, also ein Hilbertraum (wofern $\int_{\mathbb{R}} dx$ im Lebesgueschen Sinn verstanden wird) ▲

Bemerkung: Der unitäre Raum

$$\mathcal{U} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \; ; \; f \text{ stetig}, \; \langle f, f \rangle < +\infty \}$$

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} dx \, f^*(x) g(x)$$

dagegen ist nicht vollständig, also kein Hilbertraum! (Es gibt Cauchyfolgen stetiger Funktionen mit unstetigem Grenzelement.) •

IV Separable (komplexe) Hilberträume

$$\mathcal{H} = \{ f, g, \ldots \} = \mathcal{H}_{sep}$$

(5) Ein Hilbertraum ist separabel, wenn er abzählbare Basen besitzt.

> **Satz:** Jeder endlich dimensionale Hilbertraum ist separabel.

Beispiele:

(a) $\mathbb{C}^2$ ist separabel, ein Beispiel einer Basis ist die kanonische Basis

$$E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) $L^2(\mathbb{R})$ ist separabel, ein Beispiel einer Basis ist

Mathematik: x dimensionslos!

$$E = \left\{ e_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{i-1}(i-1)!\sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_{i-1}(x) \, , i \in \mathbb{N} \right\}$$

▲

Satz: Ist $\mathcal{H}_{sep}$ ein unendlich dimensionaler separabler Hilbertraum, und $\{e_i \, , i \in \mathbb{N}\}$ ein VONS (eine Basis) von $\mathcal{H}_{sep}$, so gelten die folgenden Aussagen und sind einander äquivalent:

(α) $\lim\limits_{N\to\infty} \| f - s_N[f] \| = 0 \quad , \forall f \in \mathcal{H}_{sep}$

mit $s_N[f] := \sum\limits_{i=1}^{N} \langle e_i, f \rangle e_i$

(β) $\| f \|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle e_i, f \rangle|^2 \quad , \forall f \in \mathcal{H}_{sep}$

[Besselsche Ungleichung: $\| f \|^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{N} |\langle e_i | f \rangle|^2$]

(γ) $\langle f, g \rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle \langle e_i, g \rangle \, , \forall f, g \in \mathcal{H}_{sep}$

(Parsevalsche Gleichung)

Symbolisch schreibt man dann

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, f \rangle e_i \quad , \quad \forall f \in \mathcal{H}_{sep}$$

und bezeichnet dies als Entwicklungssatz und die $\langle e_i, f \rangle$ als Entwicklungskoeffizienten.

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} dx\, |f(x)|^2}$$

Beispiel (b): $L^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, f\rangle e_i \quad , \quad \langle e_i, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\, e_i^*(x) f(x)$$

$\forall f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} dx \Big| f(x) - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \langle e_i, f\rangle e_i(x)}_{\Delta_N[f](x)} \Big|^2} = 0$$

Die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, f\rangle e_i$ ist also als Konvergenz im Mittel über $\mathbb{R}$ zu verstehen.

Punktweise Konvergenz muß nicht bestehen, weshalb die "Physikerschreibweise"

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, f\rangle e_i(x)$$

mißverständlich ist! ▲

Lineare Operatoren (Vektorabbildungen) in einem Hilbertraum

$$\mathcal{H} = \{f, g, \ldots\}$$

Lineare Operatoren

Abbildung $\hat{A}: \mathcal{D}_{\hat{A}} \subseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{W}_{\hat{A}} \subseteq \mathcal{H}$: Operator

$$\boxed{f \in \mathcal{D}_{\hat{A}} \longrightarrow \hat{A}f \in \mathcal{W}_{\hat{A}}}$$

Bemerkung: $\mathcal{D}_{\hat{A}}$ Teilraum! ●

Ein Operator $\hat{A}$ heißt linear, wenn

1) $\hat{A}(f+g) = \hat{A}f + \hat{A}g \quad , \quad f,g \in \mathcal{D}_{\hat{A}}$
2) $\hat{A}(\alpha f) = \alpha(\hat{A}f) \quad , \quad f \in \mathcal{D}_{\hat{A}}$

gilt.

Hermitesche Operatoren

$\hat{A}$ linearer Operator:

$$\hat{A} \text{ hermitesch} \overset{D}{\Leftrightarrow} \langle f, \hat{A}g \rangle = \langle \hat{A}f, g \rangle , \quad \forall f,g \in \mathcal{D}_{\hat{A}}$$

Selbstadjungierte Operatoren

Begriff des s.a. Operators fällt bei endlich dimensionalen Hilberträumen mit dem Begriff des hermiteschen Operators zusammen.

Bei unendlich dimensionalen Hilberträumen ist die mathematisch korrekte Definition des s.a. Operators kompliziert und subtil, und es gilt

$\hat{A}$ s.a. $\Rightarrow$ $\hat{A}$ hermitesch, nicht aber die Umkehrung: Hermitezität ist notwendig, nicht hinreichend für Selbstadjungiertheit. Geht man aber auf die mathematisch komplizierten Definitionsbereichsfragen nicht ein, so kann man den Unterschied zwischen s.a. und hermitesch nicht erfassen.

Beispiele:

(a) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \qquad \langle f, h\rangle = \sum_i f_i^* h_i = \begin{pmatrix} f_1^* & f_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

Operatoren = (2×2)–Matrizen mit komplexen Zahlen als Elementen, $\mathcal{D} = \mathcal{H}$

Wirkung auf Vektor von $\mathbb{C}^2$ (= 2-reihige Spaltenmatrix mit komplexen Elementen) := Matrizenmultiplikation

z.B.:

$$\hat{A} := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_{\hat{A}} = \mathcal{H}$$

$$h = \hat{A} g \; ; \quad \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i g_2 \\ i g_1 \end{pmatrix}$$

$\hat{A}$ s.a. = hermitesch, da

$$\langle f, \underbrace{\hat{A} g}_{h} \rangle = \begin{pmatrix} f_1^* & f_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i g_2 \\ i g_1 \end{pmatrix} = -i f_1^* g_2 + i f_2^* g_1$$

$$\langle \hat{A} f, g \rangle \; ; \quad \hat{A} f = \begin{pmatrix} -i f_2 \\ i f_1 \end{pmatrix}$$

=

$$\langle \hat{A} f, g \rangle = \begin{pmatrix} i f_2^* & -i f_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = i f_2^* g_1 - i f_1^* g_2$$

$$\Rightarrow \quad \langle \hat{A} f, g \rangle = \langle f, \hat{A} g \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{D}_{\hat{A}} = \mathcal{H}$$

Beachte: Stimmt mit Begriff der Selbstadjungiertheit (Hermitezität) n-reihiger Matrizen in Matrizen= rechnung überein

(b) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

Operatoren : multiplikative Operatoren oder Differentialoperatoren oder Integraloperatoren oder Linearkombinationen von solchen (s. Operatoralgebra), i.a. $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$

z.B.: $(\hat{A}f)(x) := -i f'(x)$

"absolut stetig"

$$\mathcal{D}_{\hat{A}} = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f \text{ stetig differenzierbar in } \mathbb{R},\ f' \in L^2(\mathbb{R}) \} \subset \mathcal{H}$$

($\mathcal{D}_{\hat{A}}$ Teilraum)

Aufgabe 28: $\hat{A}$ in $\mathcal{D}_{\hat{A}}$ hermitesch, da

$$\langle f, \overbrace{\hat{A}g}^{h} \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\, f^*(x) \overbrace{(\hat{A}g)}^{h}(x) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f^*(x) g'(x)$$

$$= \underbrace{-i\, f^*(x) g(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0,\ \forall f,g \in \mathcal{D}_{\hat{A}}} + i \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \underbrace{f^{*\prime}(x)}_{[f'(x)]^*} g(x)$$

da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)\ \exists$ und null ist, und dasselbe für g gilt

$$= \int_{\mathbb{R}} dx\, [\underbrace{-i f'(x)}_{(\hat{A}f)(x) =: \varphi(x)}]^* g(x)$$

$$= \langle \overbrace{\hat{A}f}^{\varphi}, g \rangle, \quad \forall f,g \in \mathcal{D}_{\hat{A}}$$

Mathematik: $\hat{A}$ in $\mathcal{D}_{\hat{A}}$ sogar s.a.!

Algebra von Operatoren

(1) Addition von Operatoren: $\hat{A} \boxplus \hat{B}$ Operator

$$\boxed{(\hat{A} \boxplus \hat{B})f := \hat{A}f \oplus \hat{B}f}\ , f \in \mathcal{D}_{\hat{A} \boxplus \hat{B}} = \mathcal{D}_{\hat{A}} \cap \mathcal{D}_{\hat{B}}$$

kommutativ

(2) Multiplikation Zahl mal Operator: $\alpha \boxdot \hat{A}$ Operator

$$\boxed{(\alpha \boxdot \hat{A})f := \alpha \odot (\hat{A}f)}\ , \quad f \in \mathcal{D}_{\alpha \boxdot \hat{A}} = \mathcal{D}_{\hat{A}}$$

kommutativ für lineare Operatoren

(3) Multiplikation von Operatoren: $\hat{A} \boxtimes \hat{B}$ Operator

$$\boxed{(\hat{A} \boxtimes \hat{B})f := \hat{A}(\hat{B}f)}\ , \quad f \in \mathcal{D}_{\hat{A} \boxtimes \hat{B}}$$

i.a. nicht kommutativ

$$= \{ f \in \mathcal{D}_{\hat{B}} \mid \hat{B}f \in \mathcal{D}_{\hat{A}} \}$$

"In der Praxis"

schreibt man natürlich statt $\hat{A} \boxplus \hat{B}$ einfach $\hat{A} + \hat{B}$

statt $\alpha \boxdot \hat{A}$ einfach $\alpha \hat{A}$

statt $\hat{A} \boxtimes \hat{B}$ einfach $\hat{A}\hat{B}$,

also z.B. für (1): $(\hat{A} + \hat{B})f := \hat{A}f + \hat{B}f$,

$$f \in \mathcal{D}_{\hat{A}+\hat{B}} = \mathcal{D}_{\hat{A}} \cap \mathcal{D}_{\hat{B}}$$

Subtraktion von Operatoren:

$$\hat{A} \boxminus \hat{B} := \hat{A} \boxplus [(-1) \boxdot \hat{B}]$$

"in der Praxis"

$\hat{A} - \hat{B} := \hat{A} + (-1)\hat{B}$ geschrieben.