EWP eines s.a. Operators

(Allgemein, d.h. $\mathcal{H}$ nicht spezifiziert!)

$$\boxed{\text{EWP:} \quad \hat{A}u = \lambda u \,, \quad u \neq 0 \qquad \cancel{u \in \mathcal{D}_{\hat{A}} \subseteq \mathcal{H}}}$$

λ EW-Parameter

"Notwehr" des mathematisch "unterbelichteten" Physikers ...

Satz 1: Die EW eines s.a. Operators sind reell, EV zu verschiedenen EW sind orthogonal.

Lösung des EWP: Fall 1: alle EW einfach (nicht entartet)

$$\hat{A}u_n = a_n u_n \,, \qquad a_n \in \sigma_d(\hat{A}) \,;$$

[falls $\sigma_d(\hat{A}) = \{\ \}$, Zeile streichen]

$$\hat{A}u_a = a u_a \,, \qquad a \in \sigma_k(\hat{A}) \,;$$

[falls $\sigma_k(\hat{A}) = \{\ \}$, Zeile streichen]

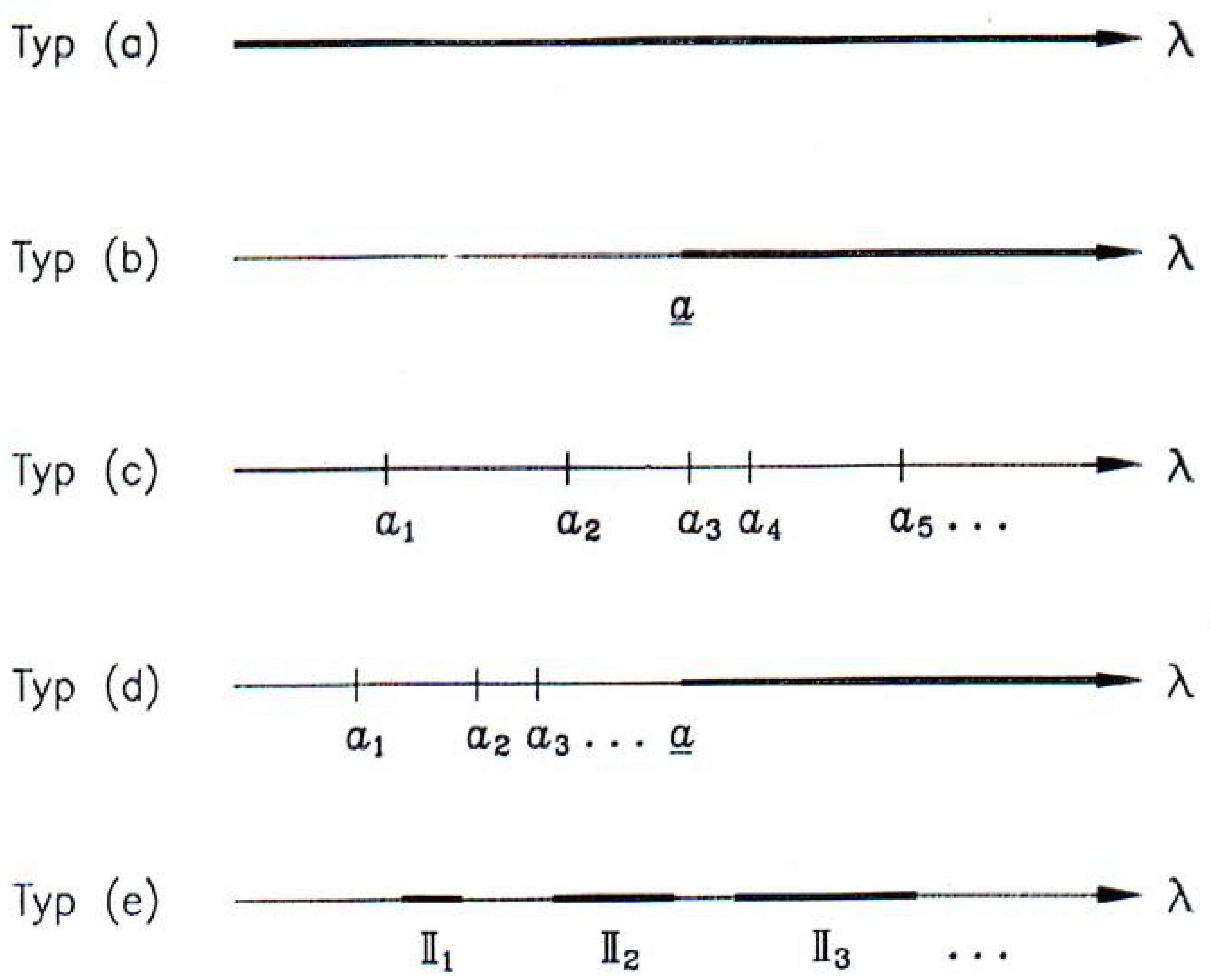
$u_n \in \mathcal{D}_{\hat{A}} \subseteq \mathcal{H}$ (s. später)

$u_a \notin \mathcal{H}$ (s. später)

EW – Spektren

$$\boxed{\sigma(\hat{A}) = \sigma_d(\hat{A}) \cup \sigma_k(\hat{A})}$$

Praktisch wichtigste Fälle:



	$\sigma(\hat{A})$
Typ (a)	$\mathbb{R}$
Typ (b)	$[\underline{a}, +\infty)$
Typ (c)	$\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ Variante!
Typ (d)	$\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \cup [\underline{a}, +\infty)$
Typ (e)	$I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$

Lösung des EWP:

Typ (a): $\hat{A} u_a = a u_a \quad , \quad a \in \mathbb{R}$

$u_a \notin \mathcal{H}$ (s. später)

Typ (c): $\hat{A} u_n = a_n u_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

$u_n \in \mathcal{D}_{\hat{A}} \subseteq \mathcal{H}$ (s. später)

usf.

EW reell: $\hat{A}u = \lambda u \Rightarrow \underbrace{\langle u, \hat{A}u \rangle} = \langle u, \lambda u \rangle = \lambda \underbrace{\langle u, u \rangle}_{\in \mathbb{R}}$

$\hat{A}$ s.a.: $\langle \hat{A}u, u \rangle = \langle u, \hat{A}u \rangle^*$,

also ebenfalls $\in \mathbb{R}$

$\in \mathbb{R}$

Bemerkung: Beweis eigentlich nur für diskrete EW schlüssig, da für EW aus Kontinuum $u \notin \mathcal{H}$ und daher $\langle u, \hat{A}u \rangle$, $\langle u, u \rangle$ eigentlich nicht definiert sind, und bei formaler Ausrechnung entweder nichts Definiertes oder ∞ ergeben.

EV zu verschiedenen EW orthogonal:

1) $$\left.\begin{aligned}\hat{A} u_{n'} &= a_{n'} u_{n'} \\ \hat{A} u_{n''} &= a_{n''} u_{n''}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle \overbrace{\hat{A} u_{n'}}^{a_{n'} u_{n'}}, u_{n''} \rangle = \langle u_{n'}, \overbrace{\hat{A} u_{n''}}^{a_{n''} u_{n''}} \rangle$$

$$a_{n'} \langle u_{n'}, u_{n''} \rangle = a_{n''} \langle u_{n'}, u_{n''} \rangle$$

$$(a_{n'} - a_{n''}) \langle u_{n'}, u_{n''} \rangle = 0$$

(α) $n' \neq n''$: $$\underbrace{(a_{n'} - a_{n''})}_{\neq 0 \;\Longrightarrow} \underbrace{\langle u_{n'}, u_{n''} \rangle}_{0} = 0$$

(β) $n' = n''$: $$0 \cdot \underbrace{\langle u_{n'}, u_{n'} \rangle}_{} = 0$$

endlich, durch geeignete Normierung zu 1 gemacht

EV zu diskreten EW sind Vektoren aus $\mathcal{D}_{\hat{A}} \subseteq \mathcal{H}$ und können auf 1 normiert werden (EWP homogen in u !)

"Echte" innere Produkte, da $u_{n'}, u_{n''} \in \mathcal{H}$ $\dashrightarrow$ $$\boxed{\langle u_{n'}, u_{n''} \rangle = \delta_{n'n''}}$$

2) formal analog:

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}u_n &= a_n u_n\\ \hat{A}u_a &= a u_a\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{(a_n - a)}_{\neq 0}\underbrace{\langle u_n, u_a\rangle}_{\Rightarrow\ \exists \text{ und ist } 0} = 0$$

(Beachte: $u_a \notin \mathcal{H}$ [s. unten], deshalb $\langle u_n, u_a\rangle$ eigentlich nicht definiert!)

Kein "echtes" inneres Produkt, formal gebildeter Ausdruck $\exists$ aber und gibt 0:

$$\boxed{\langle u_n, u_a\rangle = 0}$$ "Orthogonalität"

3) formal analog:

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}u_{a'} &= a' u_{a'}\\ \hat{A}u_{a''} &= a'' u_{a''}\end{aligned}\right\} \Rightarrow (a' - a'')\underbrace{\langle u_{a'}, u_{a''}\rangle}_{\propto\, \delta(a'-a'')} = 0$$

[Zur Erinnerung: $x\,\delta(x) = 0$]

$\propto \delta(a'-a'')$, kann durch geeignete "Normierung" zu $\delta(a'-a'')$ gemacht werden

EV zu EW aus dem Kontinuum sind nicht Elemente von $\mathcal{H}$, behandelt man sie aber formal als solche, so können sie auf die δ-Funktion "normiert" werden

$$\boxed{\langle u_{a'}, u_{a''} \rangle = \delta(a'-a'')}$$

Beachte: Durch die Normierung auf 1 ($\|u_n\| = 1$) ist u_n nur bis auf einen unimodularen Faktor bestimmt.

Ebenso ist u_a durch die "Normierung" gemäß $\langle u_{a'}, u_{a''} \rangle = \delta(a'-a'')$ nur bis auf einen unimodularen Faktor bestimmt!

u_n "eigentliche" EV

u_a "uneigentliche" EV

nach Normierung bzw. "Normierung" bis auf konstante unimodulare Faktoren bestimmt

Lösung des EWP: Fall 2: EW mit Vielfachheiten > 1 (entartete EW) $\exists$

$$\hat{A} u_{n\nu} = a_n u_{n\nu} \quad , \quad a_n \in \sigma_d(\hat{A})$$

$\nu = 1, 2, \ldots, g_n$

$g_n \geq 1$ Vielfachheit von a_n

[falls $\sigma_d(\hat{A}) = \{\}$, diese 3 Zeilen streichen]

$$\hat{A} u_{a\alpha} = a u_{a\alpha} \quad , \quad a \in \sigma_k(\hat{A})$$

$\alpha = 1, 2, \ldots, g(a)$

$g(a) \geq 1$ Vielfachheit von a

[falls $\sigma_k(\hat{A}) = \{\}$, diese 3 Zeilen streichen]

Bemerkung: g_n, $g(a)$ müssen nicht endlich sein, d.h. es können auch EW mit abzählbar unendlicher Vielfachheit $\exists$.
(Es ist auch möglich, daß die Vielfachheit eines EW nicht abzählbar ist; s. später.)

EV zu verschiedenen EW sind orthogonal (Beweis wie zuvor), die linear unabhängigen EV zu einem mehrfachen EW können stets durch gleich viele orthogonale EV ersetzt werden (z.B. Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren).

Man kann also erreichen, daß gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \langle u_{n'r'}, u_{n''r''}\rangle &= \delta_{n'n''}\,\delta_{r'r''} \\ \langle u_{nr}, u_{a\alpha}\rangle &= 0 \\ \langle u_{a'\alpha'}, u_{a''\alpha''}\rangle &= \delta(a'-a'')\,\delta_{\alpha'\alpha''} \end{aligned}}$$

Bemerkungen:

1) EV auch hier nach Normierung (bzw. "Normierung") wieder nur bis auf unimodulare Faktoren bestimmt.

2) Sind die Vielfachheiten nicht abzählbar, z.B. $r \in \mathbb{I}_n$, $\alpha \in \mathbb{I}(a)$, so treten an die Stelle der Kroneckerdeltas $\delta_{r'r'}$, $\delta_{\alpha'\alpha'}$ δ-Funktionen $\delta(r'-r'')$, $\delta(\alpha'-\alpha'')$ und in den späteren Entwicklungssätzen sind $\sum\limits_{r=1}^{g_n}$, $\sum\limits_{\alpha=1}^{g(a)}$ durch $\int\limits_{\mathbb{I}_n} dr$, $\int\limits_{\mathbb{I}(a)} d\alpha$ zu ersetzen. ●

Veranschaulichung: Hauptachsentransformation eines Ellipsoids im $\mathbb{R}^3$!

$$\boxed{\textbf{Satz 2: Entwicklungssatz: Die EV eines s.a. Operators bilden ein vollständiges Entwicklungssystem in } \mathcal{H}.}$$

Fall 1: alle EW einfach

$$\boxed{f = \sum_{n:\, a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \langle u_n, f\rangle u_n + \overbrace{\int_{a\in\sigma_k(\hat{A})} da \, \langle u_a, f\rangle \overset{\notin \mathcal{H}}{u_a}}^{\in \mathcal{H}!} \quad , \quad \forall f \in \mathcal{H}}$$

Fall 2: mehrfache EW $\exists$

$$\boxed{f = \sum_{n:\, a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \sum_{\nu=1}^{g_n} \langle u_{n\nu}, f\rangle u_{n\nu} + \int_{a\in\sigma_k(\hat{A})} da \sum_{\alpha=1}^{g(a)} \langle u_{a\alpha}, f\rangle u_{a\alpha} \quad , \quad \forall f \in \mathcal{H}}$$

Bemerkung: In Kürze werden wir diese Formeln in der knappen und schönen Formel

$$\hat{1} = \sum_{n:\, a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \hat{P}_n + \int_{a\in\sigma_k(\hat{A})} d\hat{P}(a)$$

zusammenfassen!

Entwicklungssatz: Sonderfälle

Fall 1: *alle Eigenwerte einfach* (nicht entartet)

"eindim."

Typ (a): $$f = \int_{\mathbb{R}} da \, \langle u_a, f \rangle u_a , \quad \forall f \in \mathcal{H};$$ z.B. Fourierintegral! (4.118)

Typ (c): $$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, f \rangle u_n , \quad \forall f \in \mathcal{H};$$ z.B. Entwicklung nach Hermiteschen EF! (4.119)

Typ (d): $$f = \sum_{n=1} \langle u_n, f \rangle u_n + \int_{\underline{a}}^{+\infty} da \, \langle u_a, f \rangle u_a , \quad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{4.120}$$

Fall 2: *Eigenwerte mit Vielfachheiten größer als eins* (entartete Eigenwerte) existieren

Typ (a): $$f = \int_{\mathbb{R}} da \sum_{\alpha=1}^{g(a)} \langle u_{a\alpha}, f \rangle u_{a\alpha} , \quad \forall f \in \mathcal{H}; \tag{4.121}$$

Typ (c): $$f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{g_n} \langle u_{n\nu}, f \rangle u_{n\nu} , \quad \forall f \in \mathcal{H}; \tag{4.122}$$

Typ (d): $$f = \sum_{n=1} \sum_{\nu=1}^{g_n} \langle u_{n\nu}, f \rangle u_{n\nu} + \int_{\underline{a}}^{+\infty} da \sum_{\alpha=1}^{g(a)} \langle u_{a\alpha}, f \rangle u_{a\alpha} , \quad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{4.123}$$

Bemerkung: Die Formeln vom Typ (c) stellen echte Entwicklungssätze im Sinne der Hilbertraumtheorie (Entwicklung eines Vektors $f \in \mathcal{H}$ in einem VONS $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ bzw. $\{u_{n\nu}, n \in \mathbb{N}, \nu = 1, \ldots, g_n\}$ von Vektoren $u_n \in \mathcal{H}$ bzw. $u_{n\nu} \in \mathcal{H}$ dar. (Konvergenz im Sinne der Norm des Hilbertraumes, wie in der mathem. Einführung diskutiert.)
Typ (a) z.B. ist eine Integraltransformation (z.B. Fourierintegral) und stellt f in einem anderen Sinne dar.