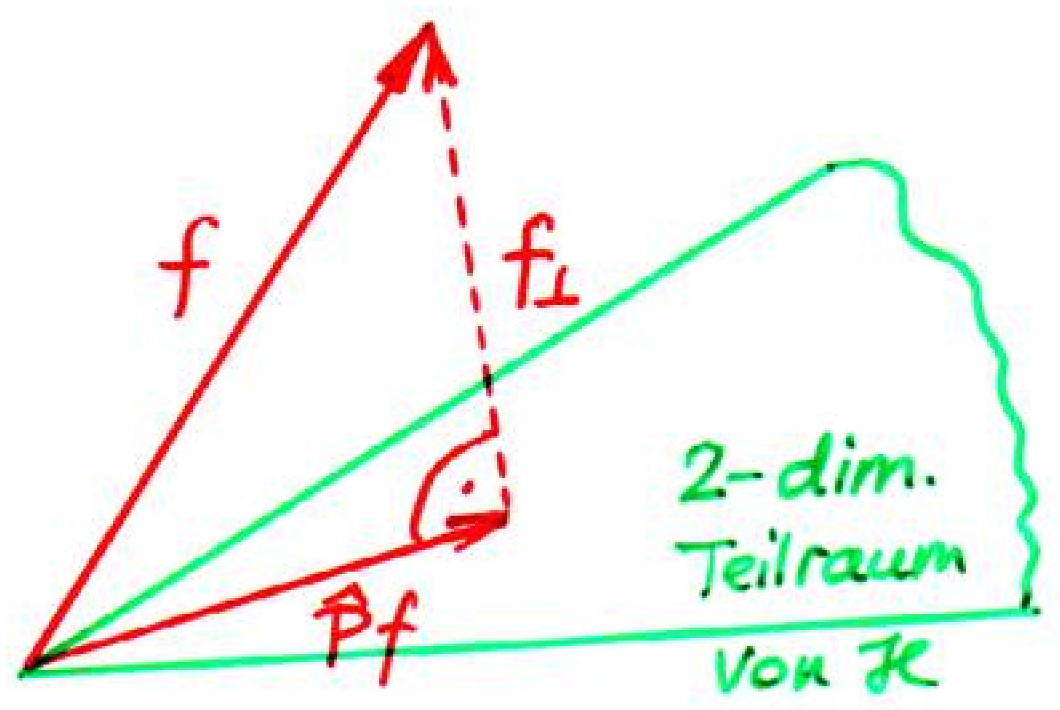
Projektionsoperatoren

$$\boxed{\hat{P} \text{ in } \mathcal{D}_{\hat{P}} = \mathcal{H} \text{ POP} \overset{D}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} \hat{P} \text{ s.a. in } \mathcal{D}_{\hat{P}} = \mathcal{H} \\ \hat{P}^2 = \hat{P} \quad (\text{Idempotenz}) \end{array}}$$

"Veranschaulichung" für $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$ ($\mathcal{H}$ 3-dim.): z.B.



$$f = \hat{P}f + f_\perp$$

$$\begin{aligned} \hat{P}f &= \hat{P}(\hat{P}f) + \hat{P}f_\perp \\ &= \hat{P}^2 f + \hat{P}f_\perp \\ &= \hat{P}f + \underbrace{\hat{P}f_\perp}_{0} \end{aligned}$$

Aufgabe 29 :

$$\boxed{\text{EW eines POP : } 1 \text{ oder (und) } 0}$$

Sonderfälle :

1) Einheitsoperator $\hat{1}$

$$\hat{1}f = f \quad , \forall f \in \mathcal{H}$$

EW 1 mit Vielfachheit $= \dim \mathcal{H}$ (also abzählbar unendlich, falls unendlich dimensionaler Hilbertraum)

$\hat{1}$ projiziert auf den Gesamtraum

2) Nulloperator $\hat{O}$

$$\hat{O} f = 0 \quad (= 0 f) \quad , \forall f \in \mathcal{H}$$

EW 0 mit Vielfachheit = dim $\mathcal{H}$

$\hat{O}$ projiziert auf den Nullvektor

$\boxed{\text{POP } \hat{P} \neq \hat{O}, \hat{1} \;:\; \text{besitzt sowohl EW 1 als auch EW 0}}$

Beachte: Falls $\dim \mathcal{H} = \infty$, muß dann entweder der EW 1 oder der EW 0 oder müssen beide EW unendliche Vielfachheit besitzen.

Frage: EW und Vielfachheiten im Beispiel von P1?

"Vorschau": POP werden wir in der QM mit Messungen verbinden (Eigenschaften bzgl. $\mathcal{U}, \mathcal{L}$, etc).

Frage: Besitzt das System die durch $\hat{P}$ beschriebenen Eigenschaften?

EW 1: Antwort "Ja"

EW 0: Antwort "Nein".

POP im Zusammenhang mit einer Observablen $\mathfrak{A}$

$(\mathfrak{A} \rightarrow \hat{A}$ s.a.$)$

1) Falls $\sigma_d(\hat{A}) \neq \{\}$ und a_n EW von $\hat{A}$:

Fall 1: a_n einfach

$$\hat{A} u_n = a_n u_n \quad , \quad \|u_n\| = 1$$

u_n spannt 1dim. Teilraum $\mathcal{H}(a_n)$ von $\mathcal{H}$ auf
($\mathcal{H}(a_n)$ ... Eigenraum von $\hat{A}$ zum EW a_n)

POP in $\mathcal{H}(a_n)$:

$$\boxed{\hat{P}_n f := \langle u_n, f \rangle u_n \quad , \quad \mathcal{D}_{\hat{P}_n} = \mathcal{H}}$$

Symbolisch: $\hat{P}_n = \langle u_n, . \rangle u_n$

DIRAC: $\hat{P}_n = |u_n\rangle\langle u_n|$
$\equiv |n\rangle\langle n|$

Beachte: $\hat{P}_n$ eindeutig bestimmt!

$$u_n \rightarrow e^{i\gamma} u_n \Rightarrow \hat{P}_n \rightarrow \langle e^{i\gamma} u_n, . \rangle e^{i\gamma} u_n$$
$$= \cancel{e^{-i\gamma}} \langle u_n, . \rangle \cancel{e^{i\gamma}} u_n$$
$$= \langle u_n, . \rangle u_n = \hat{P}_n$$

Beweis, daß $\hat{P}_n$ s.a.:

s.a. $\equiv$ hermitesch, da $\mathcal{D}_{\hat{P}_n} = \mathcal{H}$!

$$\langle f, \hat{P}_n g\rangle = \langle f, \langle u_n, g\rangle u_n\rangle = \langle u_n, g\rangle \underbrace{\langle f, u_n\rangle}_{\langle u_n, f\rangle^*} = \langle u_n, f\rangle^* \langle u_n, g\rangle$$

$$= \langle \langle u_n, f\rangle u_n, g\rangle = \langle \hat{P}_n f, g\rangle \quad , \forall f, g \in \mathcal{H} \quad ✓$$

Beweis, daß $\hat{P}_n$ idempotent:

$$\hat{P}_n^2 f = \hat{P}_n (\underbrace{\hat{P}_n f}_{h}) = \langle u_n, h\rangle u_n = \langle u_n, \underbrace{\langle u_n, f\rangle u_n}_{h}\rangle u_n = \langle u_n, f\rangle \underbrace{\langle u_n, u_n\rangle}_{1} u_n$$

$$= \langle u_n, f\rangle u_n = \hat{P}_n f \quad , \forall f \in \mathcal{H} \quad ✓$$

•

Fall 2: a_n g_n-fach $(g_n > 1)$

$$\hat{A} u_{nr} = a_n u_{nr} \quad , \quad \langle u_{nr'}, u_{nr''}\rangle = \delta_{r'r''}$$

Die $\{u_{nr}, r = 1, \dots, g_n\}$ spannen einen g_n-dim. Teilraum $\mathcal{H}(a_n)$ von $\mathcal{H}$ auf ($\mathcal{H}(a_n)$ ... Eigenraum von $\hat{A}$ zum EW a_n)

u_{nr} unendlich vieldeutig, aber $\hat{P}_n$ eindeutig bestimmt!

POP in $\mathcal{H}(a_n)$:
$$\boxed{\hat{P}_n f = \sum_{r=1}^{g_n} \langle u_{nr}, f\rangle u_{nr} \quad , \quad \mathcal{D}_{\hat{P}_n} = \mathcal{H}}$$

Symbolisch: $$\hat{P}_n = \sum_{\nu=1}^{g_n} \langle u_{n\nu}, \cdot \rangle u_{n\nu}$$

Rest wie bei Fall 1.

"Vorschau": $\hat{P}_n$ werden wir in der QM mit der Frage verbinden: System, besitzt du bzgl. der Observablen $\mathfrak{A}$ den Wert a_n?

EW1: Antwort "Ja"

EW 0: Antwort "Nein"

2) Falls $\sigma_k(\hat{A}) \neq \{\}$ und $\mathbb{I} \subseteq \sigma_k(\hat{A})$:

$\mathbb{I}$: Intervall

Analog:

POP in $\mathcal{H}(a \in \mathbb{I})$:

$$\hat{P}_{\mathbb{I}} = \int_{\mathbb{I}} \underbrace{da \langle u_a, \cdot \rangle u_a}_{\equiv d\hat{P}(a)}$$

Abkürzung! (kein POP)

Fall 1: $g(a)=1$ für $a \in \mathbb{I}$

bzw.

$$\hat{P}_{\mathbb{I}} = \int_{\mathbb{I}} \underbrace{da \sum_{\alpha=1}^{g(a)} \langle u_{a\alpha}, \cdot \rangle u_{a\alpha}}_{\equiv d\hat{P}(a)}$$

Abkürzung

Fall 2: $g(a) \geq 1$ für $a \in \mathbb{I}$

Bemerkungen: 1) $\langle u_{a'}, u_{a''} \rangle = \delta(a'-a'')$

bzw. $\langle u_{a'\alpha'}, u_{a''\alpha''} \rangle = \delta(a'-a'')\,\delta_{\alpha'\alpha''}$

wird vorausgesetzt.

2) u_a bzw. $u_{a\alpha} \notin \mathcal{H}$, aber $\hat{P}_{\mathbb{I}} f \in \mathcal{H}$!

3) $d\hat{P}(a)$ nur Abkürzung, stellt keinen POP dar!

"Vorschau": Mit welcher Frage an das System werden wir in der QM $\hat{P}_{I}$ verbinden?

Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{P}_{n'}\hat{P}_{n''} = \hat{0} \quad , \text{ falls } n' \neq n'' \\ &\hat{P}_{n}\hat{P}_{I} = \hat{0} \quad , \quad \forall n, \forall I \\ &\hat{P}_{I'}\hat{P}_{I''} = \hat{0} \quad , \text{ falls } I' \cap I'' = \{\} \end{aligned}}$$

"Orthogonale" POP

Beweis: $n' \neq n''$

$$(\hat{P}_{n'}\hat{P}_{n''})f = \hat{P}_{n'}(\hat{P}_{n''}f) =$$ der Einfachheit halber angeschrieben für $g_{n'} = g_{n''} = 1$

$$= \hat{P}_{n'}(\langle u_{n''}, f\rangle u_{n''}) = \langle u_{n''}, f\rangle \hat{P}_{n'} u_{n''}$$

$$= \langle u_{n''}, f\rangle \underbrace{\langle u_{n'}, u_{n''}\rangle}_{0} u_{n'} = 0 \;, \; \forall f$$

Analog die anderen Beziehungen. ●

$$\boxed{\begin{aligned} &\textbf{Satz: } \hat{Q}, \hat{R} \text{ POP mit } \hat{Q}\hat{R} = \hat{0} \Longrightarrow \\ &\hat{P} = \hat{Q} + \hat{R} \text{ POP} \end{aligned}}$$

Aufg. 30

Zeige selbst: $\left.\begin{matrix} \hat{Q}, \hat{R} \text{ POP} \\ \hat{Q}\hat{R} = \hat{0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{R}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{R} = \hat{0}$ ●

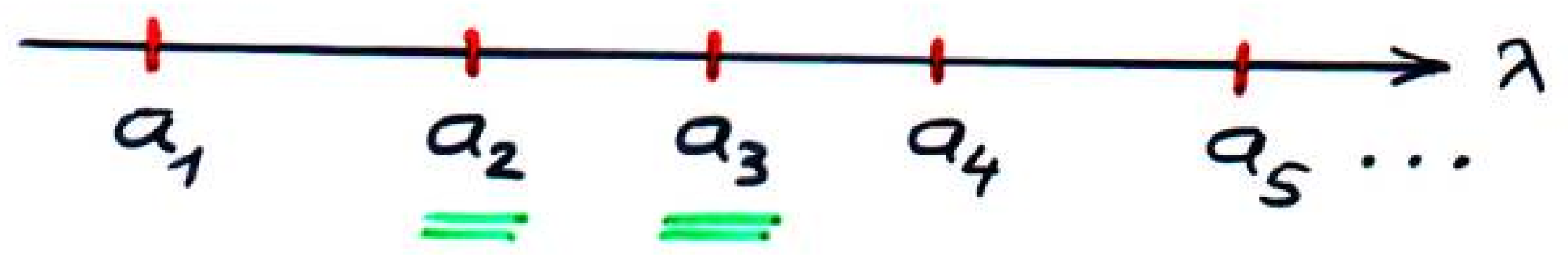
POP in $\mathcal{H}(\tau(\hat{A}))$, $\tau(\hat{A}) \subseteq \sigma(\hat{A})$:

$$\hat{P} \equiv \hat{P}(\tau(\hat{A})) = \sum_{n:\, a_n \in \tau(\hat{A})} \hat{P}_n + \int_{a \in \tau(\hat{A})} d\hat{P}(a)$$

"Vorschau": $\hat{P}$ in QM?

Beispiele:

1) $\sigma(\hat{A}) = \{a_j, j \in \mathbb{N}\}$, $\tau(\hat{A}) = \{a_2, a_3\}$

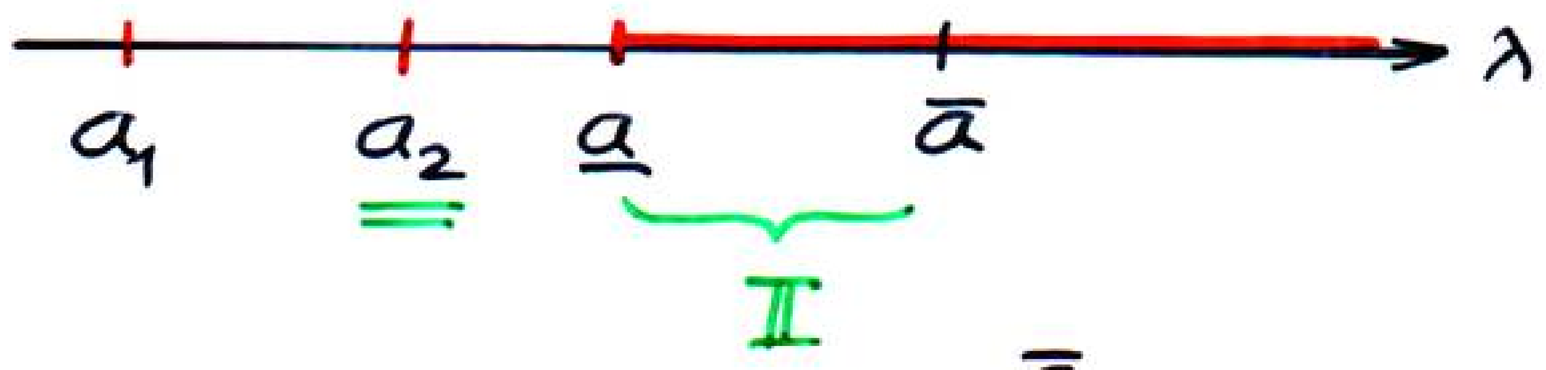


$$\hat{P} \equiv \hat{P}(\{a_2, a_3\}) = \hat{P}_2 + \hat{P}_3 ,$$ $\hat{P}$ in QM?

Bemerkung: Der Teilraum $\mathcal{H}(\{a_2, a_3\})$ von $\mathcal{H}$, in welchen $\hat{P}(a_2, a_3)$ projiziert, wird als direkte Summe der Teilräume $\mathcal{H}(a_2)$, $\mathcal{H}(a_3)$ bezeichnet:

$$\mathcal{H}(a_2, a_3) = \mathcal{H}(a_2) \oplus \mathcal{H}(a_3)$$

2) $\sigma(\hat{A}) = \{a_1, a_2\} \cup [\underline{a}, +\infty)$, $\tau(\hat{A}) = \{a_2\} \cup [\underline{a}, \bar{a}]$



$$\hat{P} \equiv \hat{P}(a_2, I) = \hat{P}_2 + \int_{\underline{a}}^{\bar{a}} d\hat{P}(a) ,$$ $\hat{P}$ in QM?

Frage: Welcher POP ergibt sich für die Wahl $\tau(\hat{A}) = \sigma(\hat{A})$?

$$\sum_{n:\, a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \hat{P}_n + \int_{a \in \sigma_k(\hat{A})} d\hat{P}(a) = \,?$$

Hilfe: Bedeutung in QM?

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Vollständigkeit des durch Lösen des EWP von } \hat{A} \\ \text{gewonnenen Satzes orthogonaler POP:} \\[1em] \displaystyle\sum_{n:\, a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \hat{P}_n + \int_{a \in \sigma_k(\hat{A})} d\hat{P}(a) = \hat{1} \\[1em] \text{("Zerlegung der Einheit")}\end{array}}$$

$\Updownarrow$ Äquivalenz

Entwicklungssatz

(d.h. "Vollständigkeit" des Vektorensatzes

$\{u_n,\ n \in \sigma_d(\hat{A})\,;\ u_a,\ a \in \sigma_k(\hat{A})\}$ bzw.

$\{u_{n\nu},\ \nu = 1, 2, \ldots, g_n,\ n \in \sigma_d(\hat{A})\,;$

$u_{a\alpha},\ \alpha = 1, 2, \ldots, g(a),\ a \in \sigma_k(\hat{A})\}$)

Entwicklungssatz: $g_n \geq 1\,,\quad g(a) \geq 1\,,\quad \forall n, \forall a$

$$f = \hat{1} f = \sum_{n:\, a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \underbrace{\sum_{\nu=1}^{g_n} \langle u_{n\nu}, f \rangle u_{n\nu}}_{\hat{P}_n f} + \int_{a \in \sigma_k(\hat{A})} \overbrace{da \sum_{\alpha=1}^{g(a)} \langle u_{a\alpha}, f \rangle u_{a\alpha}}^{d\hat{P}(a) f}\,, \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

Vollständigkeit der POP:

$$\hat{1} = \sum_{n:\, a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \hat{P}_n + \int_{a \in \sigma_k(\hat{A})} d\hat{P}(a)$$

Aufgabe 31: Veranschaulichung der bisherigen Beziehungen für $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$

Spektralform von $\hat{A}$ (s.a.):

$$\boxed{\hat{A} = \sum_{n:\, a_n \in \sigma_d(\hat{A})} a_n \hat{P}_n + \int_{a \in \sigma_k(\hat{A})} a\, d\hat{P}(a)}$$

Aufgabe 32

Beachte: $\hat{A}\hat{P}_n = a_n \hat{P}_n$

$\hat{A}\, d\hat{P}(a) = a\, d\hat{P}(a)$

Vollständigkeitsbeziehung (Zerlegung der Einheit)

Typ (a): $$\hat{1} = \int_{\mathbb{R}} d\hat{P}(a)\,, \tag{4.135}$$

Typ (c): $$\hat{1} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{P}_n\,, \tag{4.136}$$

Typ (d): $$\hat{1} = \sum_{n=1} \hat{P}_n + \int_{\underline{a}}^{+\infty} d\hat{P}(a)\,. \tag{4.137}$$

Spektralform eines s.a. Operators

Typ (a): $$\hat{A} = \int_{\mathbb{R}} a\, d\hat{P}(a)\,, \tag{4.139}$$

Typ (c): $$\hat{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{P}_n\,, \tag{4.140}$$

Typ (d): $$\hat{A} = \sum_{n=1} a_n \hat{P}_n + \int_{\underline{a}}^{+\infty} a\, d\hat{P}(a)\,. \tag{4.141}$$