8. Renormierungsgruppentheorie

8.1 Einleitung

bisher: Gültigkeit der Skalengesetze und der Universalitätshypothese für das kritische Verhalten in der Nähe von Phasenübergängen 2. Ordnung charakteristisch

aber:
- Erklärungen für Homogenitätspostulat, aber kein mathematischer Beweis
- keine Berechnung der universellen Größen (kritische Exponenten, Amplitudenverhältnis, Skalenfunktionen, ...)

Renormierungsgruppentheorie (RG) gelang Durchbruch:
- ermöglicht Berechnung der kritischen Exponenten
- Gültigkeit der Skalengesetze und der Universalitätsgesetze

Wünsche an RG (Fisher)

(i) Erklärung der Gültigkeit der Potenzgesetze

(ii) Berechnung der kritischen Exponenten

(iii) Erklärung, warum klassische Exponenten falsch sind

(iv) ...

8.2 Kadanoff transformation für Ising-Modell (1d)

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i$$

$$\Downarrow \quad \bar{\mathcal{H}} = -\mathcal{H} \frac{1}{k_B T} = -\beta \mathcal{H} \quad + \text{ per. Randbed.}$$

$$\bar{\mathcal{H}} = K \sum_i s_i s_{i+1} + h \sum_i s_i + C \sum_i 1$$

mit: $K = \frac{J}{k_B T}$

$h = \frac{H}{k_B T}$

$\bar{\mathcal{K}}$ entspricht Tripel (K, h, C)

entspricht einem Punkt im 3 dim Raum $\mathbb{H} = \{(K, h, C)\}$

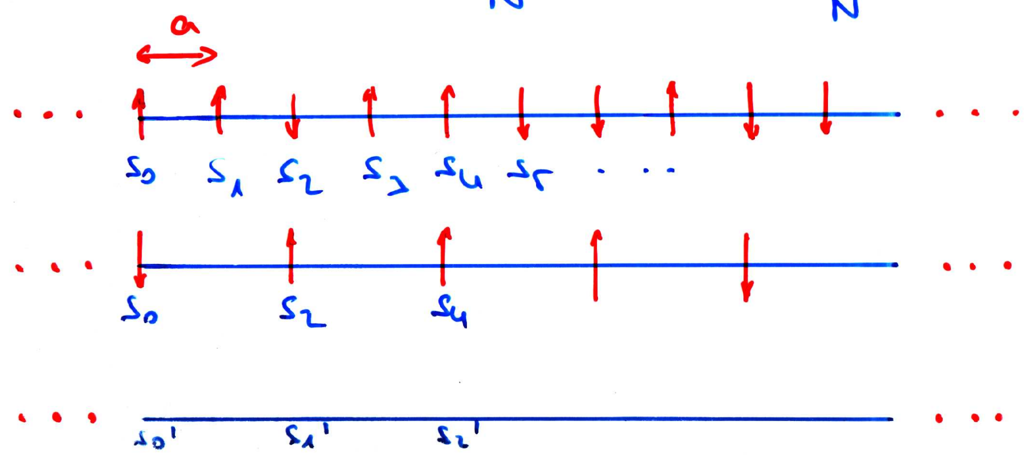
$\Rightarrow$ bei Veränderung der physikalischen Variablen (z.B. T, H)

$\Rightarrow$ Bewegung im Raum $\mathbb{H}$

Zustandssumme

$$Z_N[\bar{\mathcal{K}}] = \frac{1}{2^N} \sum_{s_0=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} e^{\bar{\mathcal{K}}}$$

$$g[\bar{\mathcal{K}}] = \frac{G[\bar{\mathcal{K}}]}{N} = -\frac{k_B T}{N} \ln Z_N[\bar{\mathcal{K}}]$$



1\. Teile → 2. Teile: partielle Spur über ungerade Spins
gerade Spins nicht beeinträchtigt

⇒ renormierte Kette, halb so viele Spins
("decimation", "dedecoration")

$$Z_N[\bar{\mathcal{H}}] = \frac{1}{2^N} \sum_{s_0=\pm1} \cdots \sum_{s_N=\pm1} e^{\bar{\mathcal{H}}}$$

$$\frac{1}{2^N} \sum_{s_0=\pm1} \cdots \sum_{s_N=\pm1} \prod_{i=0}^{N} e^{K s_i s_{i+1}} \left(e^{h s_i} \, e^{CN} \right)$$

... (s. Beiblatt)

$$Z_{N/2}[\bar{\mathcal{H}}'] = \frac{1}{2^N} \sum_{s_0=\pm1} \cdots \sum_{s_N=\pm1} e^{\bar{\mathcal{H}}'}$$

↑ nur gerade Indices

$\bar{\mathcal{H}}' = (K', h', c')$

- mit geeignet definierten K', h', c'
- halb so viele Spins

lässt sich $\bar{\mathcal{H}}'$ darstellen als

$$\bar{\mathcal{H}}' = K' \sum_i s_i' s_{i+1}' + h' \sum_i s_i' + c' \sum_i 1$$

mit geeignet gewählten K', h', c'

$\Rightarrow$ ein Schritt einer Renormierungstransformation geglückt

formal:

$\bar{\mathcal{H}}' = R_b[\bar{\mathcal{H}}]$ $\quad$ $b = 2$ (räumliche Skalierungsfaktor)

$\Rightarrow$ $N \to N' = \frac{N}{b}$ $\quad (= \frac{N}{2})$

bzw. $N' = \frac{N}{b^d}$ $\quad$ $d \ldots$ Raumdimension

Forderungen an $\bar{\mathcal{H}}'$ führen (s.h. Beiblatt) zu

$$e^{4k'} = \frac{1}{\cosh^2 h}\left[\cosh(2k+h)\,\cosh(2k-h)\right] \qquad (A)$$

$$e^{2h'} = \frac{1}{\cosh(2k-h)}\cosh(2k+h)$$

$$e^{4C'} = e^{8C}\cosh(2k+h)\,\cosh(2k-h)\,\cosh^2 h$$

$\uparrow e^{2\cdot 4C}$!

Rekursionsrelationen

$$(k, h, C) \to (k', h', C') \to (k'', h'', C'') \to \dots$$

(a) räumliches Skalieren und Korrelationsfunktionen

Abstände im	ursprünglichen Gitter		reskalierten Gitter
	a	$\longrightarrow a' = 2a \;\to$	$a' \to a$

Abstände: $R \to R' = \frac{R}{b} \; \left(= \frac{R}{2}\right)$

Spins: Umindizierung

$$s_2 \to s_1'$$
$$s_4 \to s_2'$$
$$s_6 \to s_3'$$
$$\vdots$$

$$s_{2R'} = s'_{R'}$$

Korrelationsfunktionen:

$$\langle s_0 \, s_{2R'} \rangle = \langle s_0' \, s'_{R'} \rangle$$

Spins im ursp. System

Spins im 'decimated system'

Korrelationslänge: $\xi' = \xi[\bar{K}']$, $\xi = \xi[\bar{K}]$ $\Rightarrow$ $\xi[\bar{K}] = \underset{(b)}{2}\, \xi[\bar{K}']$

$\Rightarrow$ Verkürzung der Korrelationslänge

(b) Unitarität

$$Z_{N'}[\bar{K}'] = Z_N[\bar{K}]$$

Wert der Zustandssumme bleibt unter Renormierungstransformation erhalten

$$\Rightarrow \tilde{g}[\bar{K}] = \frac{1}{N} \ln Z_N[\bar{K}]$$

$\tilde{g} \leftrightarrow g$ (beim $k_B T$)

$$= \frac{N'}{N} \frac{1}{N'} \ln Z_{N'}[\bar{K}'] = b^{-d}\, \tilde{g}[\bar{K}']$$

$$\underline{\tilde{g}[\bar{K}] = b^{-d}\, \tilde{g}[\bar{K}']}$$

8.2 Parameterfluss, Rekursionsrelation, Fixpunkte

allgemein (weg von Ising 1d)

Gleichungen (A) beschreiben Fluss eines Punktes durch den Raum $\mathbb{H}$
(p. 8.6)

$$\tilde{g}[\vec{\mathcal{H}}] = \tilde{g}[k,h,c] = b^{-d}\,\tilde{g}[k',h',c'] = b^{-d}\,\tilde{g}[\vec{\mathcal{H}}']$$

mit: $k' = R_k(k,h,\cancel{c})$ „Flussgleichungen"

$h' = R_h(k,h,\cancel{c})$

$c' = R_c(k,h,c) = b^d c + R_0(k,h)$

R_i ... Halbgruppen (Inversion deutlich nicht benötigt)

Weiters: da diese Gleichungen auch T enthalten, sind sie auch Flussgleichungen für T $\Rightarrow$ $T' = R_T(T)$

→ es kann passieren, das Fixpunkt(e) existiere(n): T^*

$$T^* = Q_r(T^*)$$

<u>Bedeutung der Fixpunkte:</u>

Korrelationslänge ξ

$$\xi[\bar{\mathcal{H}}] = b\,\xi[\bar{\mathcal{H}}'] \qquad \text{(p. 8.8)}$$

$\downarrow T_i\,(H=0)$ $\qquad \downarrow T'_i\,(H=0)$

$$\xi[T] = b\,\xi[T']$$

$T = T^*$: $\underline{\xi[T^*] = b\,\xi[T^*]}$

$\xi[T^*] = \infty$ → kritischer Punkt → $\underline{T^* = T_{cr}}$

$\xi[T^*] = 0$ → keine Korrelationen → $T^* = 0$, $T^* = \infty$ (ohne Feld)

'triviale Fixpunkte'

Frage: welche Bedeutung hat die Nähe des kritischen Punktes?

$\Rightarrow$ Linearisierung in der Nähe des kritischen Punktes

- Renormierungsgruppentransformation i.a. nicht linear (vgl. (A))
- nahe Fixpunkt: Hoffnung auf Linearisierung

$$\tau = \frac{T - T_c}{T_c} = \frac{T - T^*}{T^*}$$

N.R.: $\tau' = \frac{T' - T^*}{T^*}$ $\quad$ $\tau = \frac{T - T^*}{T^*}$

$T' = \tau' T^* + T^*$ (*) $\quad$ $T = \tau T^* + T^*$ (**)

$$T' = R_T(T)$$

(*) $\downarrow$ $\quad$ $\rightarrow$ (**)

$$\tau' T^* + T^* = R_T(T^* + \tau T^*)$$

$$\simeq T^* + \tau T^* R'(b)$$

lin. Näherung

$$\Rightarrow \underline{\tau' \simeq \tau R'(b)}$$

$$\tau' \sim \tau\, R'(b)$$

(a) $\tau'' \sim \tau\, R'(b)\, R'(b) + \dots$ 2x iteriert

(b) $\tau'' \sim \tau\, R'(b^2)$

$\rightarrow R'(b)\, R'(b) = R'(b^2) \Rightarrow \underline{R'(b) = b^\lambda}$

λ … const (von b unab.)

<u>l Iterationen:</u> $\underline{\tau^{(l)}} = \tau\, [R'(b)]^l = (b^\lambda)^l\, \tau$

$= \underline{b^{l\lambda}\, \tau}$

<u>Korrelationslänge:</u>

$$\xi[T] = b\, \xi[T]$$

$\downarrow \; T \sim T^*$

$$\xi[\tau] = b\, \xi[\tau'] = b\, \xi[\tau\, R'(b)] = b\, \xi[\tau\, b^\lambda]$$

nach l Iterat. $\xi[\tau] = b^l\, \xi[\tau\, b^{l\lambda}]$

also : $\xi[\tau] = b^{l}\,\xi[\tau\, b^{l\lambda}]$

l beliebig : l so, dass $b^{l} = \tau^{-1/\lambda}$ (*)

$\Rightarrow \underline{\xi[\tau]} = \tau^{-1/\lambda}\,\xi[\tau(\tau^{-1/\lambda\cdot\lambda})] = \tau^{-1/\lambda}\,\xi[1] \sim \underline{\tau^{-1/\lambda}}$

Potenzgesetz !

aus : $\xi[\tau] \sim \tau^{-1/\lambda} \Rightarrow \nu = \frac{1}{\lambda}$ (krit. Exponent)

<u>analog</u>: (ohne Rechnung)

$$\tilde{g}[T] = b^{-d}\,\tilde{g}[T']$$

$\downarrow$ $T \sim T^{*}$

$$\tilde{g}[\tau] = b^{-dl}\,\tilde{g}[b^{\lambda l}\tau]$$

wähle : $b^{l} = \tau^{-1/\lambda}$ (*)

folgt :... $\tilde{g}[\tau] \sim \tau^{d\nu}\,\tilde{g}[1]$

mit : $\tilde{g} \sim \tau^{2-\alpha}$

$\Rightarrow 2-\alpha = d\nu$

2 Variable ($H \neq 0$!)

$$\left.\begin{aligned} T' &= R_T(T, H) \\ H' &= R_H(T, H) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{pmatrix} T \\ H \\ C \end{pmatrix}' = R_b \begin{pmatrix} T \\ H \\ C \end{pmatrix}$$ ←-- weggelassen

es können aber noch andere Variable auftreten

gesucht: Fixpunkt $\begin{pmatrix} T^* \\ H^* \end{pmatrix}$

$$\xi[T^*, H^*] = \xi^* = b\,\xi^* = \infty$$

Linearisierung

$$\Delta T = T - T^* \; ; \quad \Delta H = H - H^*$$

$$\begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta H \end{pmatrix}' = R \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta H \end{pmatrix}$$

↑ Matrix

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial R_T}{\partial T} & \frac{\partial R_H}{\partial T} \\ \frac{\partial R_T}{\partial H} & \frac{\partial R_H}{\partial H} \end{bmatrix}^*$$

↑ am Fixpunkt berechnet

Eigenwerte von R: $R_1 = b^{\lambda_1}$

$R_2 = b^{\lambda_2}$

Eigenvektoren von R: $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$

Entwicklung von

$$\begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta H \end{pmatrix} = h_1 \vec{q}_1 + h_2 \vec{q}_2$$

kritische Felder

(lineare) Skalenfelder

bzw: h_i sind Linearkombinationen von ΔT, ΔH (Magnet)

ΔT, $\Delta \rho$ (Flüssigkeit)

...

es gilt wieder:

$$\left.\begin{aligned} h_1^{(l)} &= (b^{\lambda_1})^l \, h_1 = b^{\lambda_1 l} \, h_1 \\ h_2^{(l)} &= (b^{\lambda_2})^l \, h_2 = b^{\lambda_2 l} \, h_2 \end{aligned}\right\}$$ [entspricht τ, p. 8.12]

Thermodynamik:

$$\tilde{g}(h_1, h_2, \dots) = b^{-d\ell}\, \tilde{g}(b^{\lambda_1 \ell} h_1, b^{\lambda_2 \ell} h_2, \dots)$$

wieder zurück zum Magnet:

da Problem symmetrisch $\Rightarrow$ Matrix R symmetrisch

$\Rightarrow$ $h_1 = \tau$

$h_2 = H$

also:

$$\tilde{g}(\tau, H) = b^{-d\ell}\, \tilde{g}(b^{\lambda_1 \ell} \tau, b^{\lambda_2 \ell} H)$$

sei:

$b^{\ell \lambda_1} = \frac{1}{|\tau|}$ also $b = \left(\frac{1}{|\tau|}\right)^{1/(\ell \lambda_1)}$

$$\tilde{g}(\bar{\tau}, H) = \underbrace{\left(|\bar{\tau}|^{-\frac{1}{\ell\lambda_1}}\right)^{-d\ell}}_{|\bar{\tau}|^{d/\lambda_1}} \tilde{g}\left(\pm 1, |\bar{\tau}|^{\lambda_2 \ell/(-\ell\lambda_1)} H\right)$$

$$= |\bar{\tau}|^{d/\lambda_1} \tilde{g}\left(\pm 1, |\bar{\tau}|^{-\lambda_2/\lambda_1} H\right) = \tilde{G}_{\pm}\left(|\bar{\tau}|^{-\lambda_2/\lambda_1} H\right) |\bar{\tau}|^{d/\lambda_1}$$

vgl. Skalengesetz (Widom) und ähnliche Relationen

$$\Rightarrow \quad \beta\delta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$(2-\alpha) = \frac{d}{\lambda_1}$$

$$\beta = \frac{d-\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$\gamma = \frac{d-2\lambda_2}{\lambda_1}$$

d.h. Skalengesetz verifiziert

analog für Korrelationsfunktionen

$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \frac{\vec{r}}{b}$

$S_{\vec{r}} \to S_{\vec{r}\,'} = \frac{1}{c} S_{\vec{r}}$ $\qquad c \ldots$ noch unbestimmt

$\Rightarrow \quad c^2\, \Gamma(b^{-1}\vec{r};\, T', H') = \Gamma(\vec{r};\, T, H) \qquad c^2 = c^2(b)$

linearisieren:

$\Rightarrow \Gamma(\vec{r};\, \tau, H) \sim c^2(b)\, \Gamma(b^{-1}\vec{r};\, b^{\lambda_1}\tau,\, b^{\lambda_2} H)$

sei: $\quad b^{\lambda_1} = \frac{1}{|\tau|}, \quad H = 0$

$\Gamma(\vec{r};\, \tau, 0) \sim c^2(|\tau|^{-1/\lambda_1})\, \Gamma(|\tau|^{1/\lambda_1}\vec{r};\, \pm 1, 0)$

mit $\quad \xi \sim |\tau|^{-\nu} \quad$ und $\quad \Gamma(r) \sim r^{-(d-2+\eta)} \quad$ bei $T \sim T_c$

folgt ... $\quad \nu = 1/\lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{2-\alpha = d\nu}$

$\underline{\gamma = (2-\eta)\nu}$ $\qquad$ (Hyper) Skalenrelationen

8.3 Renormierungsgruppe allgemein

(a) Grundlagen

(i) Raum der Hamiltonfunktionen $\mathbb{H}$

Bsp: Ising – 2D

$$\bar{\mathcal{H}} = + K \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j$$

$$\Big\downarrow \; b = \sqrt{2}$$

$$\bar{\mathcal{H}}' = A' + K' \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j + L' \sum_{[ij]} s_i s_j + M' \sum s_i s_j s_k s_l$$

$$\Big\downarrow \; b = \sqrt{2}$$

$$\bar{\mathcal{H}}'' = \dots$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{H}$ ∞-dimensional

Konkret: $M' \ll L' \le K'$ $\Rightarrow$ nicht trivialer Fixpunkt (s.h. Schwabl)

$\uparrow$ vernachlässigt

mit: $K_c = 0.3921$ Onsager: 0.4406

MF: 0.25

$\nu = 0.638$ Onsager: 1

MF: 0.5

(ii) Definition der Renormierungsgruppe R_b

$\bar{\mathcal{H}} \to \bar{\mathcal{H}}' = R_b[\bar{\mathcal{H}}]$

Transformationen im q- oder r-Raum möglich

(iii) 'decimation'

$N \to N' = \frac{N}{b^d}$

(iv) Skalierung

2 Gebiete, die ursprünglich einen Abstand r hatten, werden nach der Transformation um einen Faktor b näher gebracht

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \frac{\vec{r}}{b} \qquad \vec{q} \to \vec{q}\,' = q\,b$$

$$\xi \to \xi' = \frac{\xi}{b}$$

(v) Unitarität

$$Z_N[\bar{\sigma}] = Z_{N/2}[\bar{\sigma}']$$

$$g[\bar{\sigma}] = b^{-d}\, g[\bar{\sigma}']$$

(vi) Uniformität,

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\sigma} \to \bar{\sigma}' \\ \bar{\sigma} + \delta\bar{\sigma} \to \bar{\sigma}' + \delta\bar{\sigma}' \end{array}\right\} \Rightarrow \delta\bar{\sigma} \to \ \Rightarrow \delta\bar{\sigma}' \to 0$$

$\bar{\sigma}$ wird glatt Ableitungen

(vii) Eindeutigkeit

$\bar{\sigma}$ gegeben $\to$ es existieren mehrere Renormierungsgruppentransf.

(r-, q-Raum, ...)

b, Parameterfluss, Universalität, Skalierung

(i) Abbildung Fisher

(ii) Fixpunkte Spektren

Fixpunkt Hamiltonfunktion $\bar{\mathcal{H}}^*$

$$\bar{\mathcal{H}}^* = R_b[\bar{\mathcal{H}}^*]$$

$$R_b[\bar{\mathcal{H}}^* + \delta\bar{\mathcal{H}}] \simeq \bar{\mathcal{H}}^* + \mathcal{L}\,\delta\bar{\mathcal{H}}$$

linearisierte Rekursion

$\Rightarrow \delta\bar{\mathcal{H}}' = \mathcal{L}\,\delta\bar{\mathcal{H}}$

$\Rightarrow$ Eigenoperatoren $\delta\bar{\mathcal{H}}_i$ mit $\mathcal{L}\,\delta\bar{\mathcal{H}}_i = \Lambda_i\,\delta\bar{\mathcal{H}}_i$

$\Lambda_i = b^{\lambda_i}$

$\rightarrow \bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}^* + \sum_i h_i\,\delta\bar{\mathcal{H}}_i$

h_i ... Skalenfelder $(\tau, H, \Delta p, \dots)$

$\delta\bar{\mathcal{H}}_i$ ... Skalenoperatoren

Transformation

$$\bar{\mathcal{H}}' = R_b[\bar{\mathcal{H}}] \simeq \bar{\mathcal{H}}^* + \sum_i h_i \Lambda_i \, \delta\bar{\mathcal{H}}_i$$

$$\bar{\mathcal{H}}^{(\ell)} = R_b[\bar{\mathcal{H}}] \simeq \bar{\mathcal{H}}^* + \sum_i h_i \Lambda_i^{\ell} \, \delta\bar{\mathcal{H}}_i \overset{!}{=} \bar{\mathcal{H}}^* + \sum_i h_i^{(\ell)} \delta\bar{\mathcal{H}}_i$$

also:

$$h_i^{(\ell)} = h_i \Lambda_i^{\ell} = b^{\ell \lambda_i} h_i$$

3 mögliche Fälle

(α) $\lambda_i > 0 \Rightarrow b^{\lambda_i} > 1$ $h_i^{(\ell)}$ steigt mit ℓ

h_i … relevant fields

$\delta\bar{\mathcal{H}}_i$ … relevant operators

(β) $\lambda_i < 0 \Rightarrow b^{\lambda_i} < 1$

h_i … irrelevant fields

$\delta\bar{\mathcal{H}}_i$ … irrelevant operators (γ) $\lambda_i = 0$ $\quad b^{\lambda_i} = 1$ 'marginal'

c) Skalenverhalten der Energie (thermodynamischen Potentiale)

$$\tilde{g}(h_1, h_2, h_3, \ldots) = b^{-dl}\, \tilde{g}(b^{\lambda_1 l} h_1, b^{\lambda_2 l} h_2, b^{\lambda_3 l} h_3, \ldots)$$

$h_1 \uparrow \tau$, $h_2 \uparrow H$

sei $b^{l\lambda_1} = \frac{1}{|\tau|}$

damit ist

$$\tilde{g}(h_1, h_2, h_3, \ldots) = |\tau|^{d/\lambda_1}\, \tilde{g}(\pm 1, h_2 |\tau|^{-\lambda_2/\lambda_1}, h_3 |\tau|^{-\lambda_3/\lambda_1}, \ldots)$$

$\Rightarrow$ $2 - \alpha = \frac{d}{\lambda_1}$

$\lambda_2/\lambda_1 = \Delta = \beta\delta$

weiter: Exponenten für h_k, $k \geq 3$: $\frac{\lambda_k}{\lambda_1}$

(α) $\frac{\lambda_k}{\lambda_1} > 0 \Rightarrow h_k$ relevante Variable

$\Rightarrow$ 'crossover' zu einem anderen kritischen Verhalten

(anderer Universalitätsklasse)

(β) $\frac{\lambda_k}{\lambda_1} < 0 \Rightarrow h_k$ irrelevante Variable

$\Rightarrow$ Korrekturfaktor im Potenzgesetz

$$\left[1 + \alpha_k \tau^{\frac{\lambda_k}{\lambda_1}} + \ldots \right]$$

"corrections to scaling"