Lösungsskizzen, 1. Tutorium, SS 2016

T1. TOTALE DIFFERENTIALE

Wenn die Differentialform w ein totales Differential sein soll, muss das zweimalige Ableiten der Stammfunktion $F(V, N, T)$ nach unterschiedlichen Variablen, dasselbe ergeben. Durch Ableiten einzelner Teile von w kann das überprüft werden.

a

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{T}{V}\right)_{T,N} = -\frac{T}{V^2} \neq \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{T\,N}{V^2}\right)_{T,V} = +\frac{T}{V^2} \tag{1}$$

w ist kein totales Differential.

b

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\ln c\,V\right)_{T,N} = \frac{1}{V} = \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{N}{V}\right)_{T,V} = \frac{1}{V} \tag{2}$$

w ist ein totales Differential mit der Stammfunktion

$$F(N, V, T) = N \ln cV + 2T^{\frac{3}{2}} \tag{3}$$

T2. WÜRFEL

a). die Summe Σ der erwürfelten Augen

$$\mathrm{E}\left[\sum_i^N X_i\right] = N \cdot 3,5 \qquad \mathrm{Var}\left[\sum_i^N X_i\right] = N \cdot 2,92 \tag{4}$$

Verhältnis im Limes großer N:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sigma}{\mathrm{E}} \propto \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \to 0 \tag{5}$$

b). das Produkt $\prod$ der erwürfelten Augen

$$\mathrm{E}\left[\prod_i^N X_i\right] = 3,5^N \qquad \mathrm{Var}\left[\prod_i^N X_i\right] = \mathrm{E}\left[\left(\prod_i^N X_i\right)^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[\prod_i^N X_i\right]\right)^2 = \left(\frac{91}{6}\right)^N - \left(\frac{21}{6}\right)^{2N} \tag{6}$$

Verhältnis:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sigma}{\mathrm{E}} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sqrt{\left(\frac{91}{6}\right)^N - \left(\frac{21}{6}\right)^{2N}}}{\left(\frac{21}{6}\right)^N} =\to \infty \tag{7}$$

c). den Logarithmus des Produktes der erwürfelten Augen $\ln \prod$

$$\mathrm{E}\left[\log \prod_i^N X_i\right] = \frac{N}{6} \cdot \log 6! = N \cdot 1,09 \qquad \mathrm{Var}\left[\log \prod_i^N X_i\right] = \sum_i^N \mathrm{Var}\left[\log X_i\right] = N \cdot 0,37 \tag{8}$$

Das Verhältnis von Erwartungswert zu Varianz im Limes großer N ist gleich wie im Unterpunkt a.

d). Makrozustände

Die Anzahl der möglichen Kombination wird durch Abzählen ermittelt. Für eine Summe von $\Sigma_1 = 13$ erhält man 140 mögliche Zustände, Bei einer Summe von $\Sigma_2 = 23$ gibt es 4.

T3. KOMPRESSION EINES IDEALEN GASES

$$W = -\int_{V_0}^{V_0/2} P \,\mathrm{d}V = P_0 V_0 = 2494{,}34\,\mathrm{J}, \tag{9}$$

wobei die Angaben, $N_0 = 1$ mol oder $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Teilchen, $k_\mathrm{B} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ und $T = 300\,\mathrm{K}$ eingesetzt wurden.

T4. ISOBARE, ISOTHERME UND POLYTROPE PROZESSE

a). Benötigte Arbeit:

$$\kappa = n(\neq 0,1) : \Delta W = -\int_{V_1}^{V_2} P dV = \frac{P_1 V_1}{n-1}\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1} - 1\right) \tag{10}$$

$$\kappa = 0 : \Delta W = -P_2(V_2 - V_1) \tag{11}$$

$$\kappa = 1 : \Delta W = -\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) P_2 V_2 \tag{12}$$

b). Änderung der inneren Energie:

$$\Delta E = \frac{3}{2}(P_2 V_2 - P_1 V_1) \tag{13}$$

c). Auftretende Wärme:

$$\kappa = n(\neq 0,1) : \Delta Q = \frac{3}{2}(P_2 V_2 - P_1 V_1) - \frac{P_1 V_1}{n-1}\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1} - 1\right) \tag{14}$$

$$\kappa = 0 : \Delta Q = \Delta E - \Delta W = \frac{5}{2}(P_2 V_2 - P_1 V_1) \tag{15}$$

$$\kappa = 1 : \Delta Q = -\Delta W \tag{16}$$

Für $n = \frac{5}{3}$ ist $\Delta Q = 0$ und der Prozess adiabatisch.